

BREVE INTRODUCCIÓN A LAS SUPERFICIES K3

VÍCTOR GONZÁLEZ-AGUILERA

1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de este cursillo es presentar las propiedades básicas de ciertas superficies llamadas actualmente superficies K3, ellas al parecer fueron bautizadas con este curioso nombre por André Weil, en honor al trío Kummer, Kahler, Kodaira y a la belleza de montaña K2 de Cachemira. La clásica aplicación de períodos (actual teoría de Hodge), ha permitido obtener importantes resultados sobre sus espacios de moduli (Piatetski-Shapiro y Shafarevich), ellas tienen asociados también interesantes reticulados (Nikulin y Mukai) y últimamente (McMullen) se ha comenzado a estudiar la dinámica de algunos de sus grupos de automorfismos. Lamentablemente o felizmente los prerequisites para presentarlas en sociedad, exceden las materias habituales cubiertas en las licenciaturas, los alumnos interesados, si lo desean podrán acceder a ampliaciones de estas breves notas preliminares, lo que les permitiría profundizar algunos aspectos de la geometría compleja. Termino reiterando el carácter preliminar de estas notas y agradeciendo a los organizadores la invitación para desarrollar este cursillo.

2. SUPERFICIES ALGEBRAICAS

2.1. Definiciones y ejemplos. Una superficie analítica compleja es una variedad analítica compleja lisa (manifold) X compacta y conexa de dimensión compleja 2. Si denotamos por $\mathcal{M}(X)$ el cuerpo de funciones meromorfas globales en X , diremos (de manera económica) que X es una superficie algebraica si $\mathcal{M}(X)$ separa los puntos de X y separa las tangentes. De manera más explícita:

- (1) Para cada par de puntos $p, q \in X$ ($p \neq q$) hay una función meromorfa global $f \in \mathcal{M}(X)$ de manera que $f(p) \neq f(q)$.
- (2) Para cada punto $p \in X$ existen funciones meromorfas globales $f, g \in \mathcal{M}(X)$ de manera que (f, g) son coordenadas locales en p .

La compacidad de X implica que se pueda elegir un número finito s_1, s_2, \dots, s_n de funciones meromorfas que separan puntos y tangentes, las cuales se puedan usar para construir una función $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}_n$, definida por $\varphi(p) = (1 : s_1(p) : s_2(p) : \dots : s_n(p))$, con ello, $\varphi(X)$ es una subvariedad analítica compleja lisa de \mathbb{P}_n , la cual debido a un célebre teorema de Chow es un subconjunto algebraico de \mathbb{P}_n , es decir $\varphi(X)$ esta determinada como los ceros de un conjunto de polinomios homogéneos, en este sentido X que se identifica con su imagen es una superficie algebraica proyectiva.

Ejemplo 2.1. (1) Sea X el plano proyectivo complejo \mathbb{P}_2 con cordenadas homogéneas $(x_0 : x_1 : x_2)$, el es una superficie algebraica.

(2) Sea V un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión 2 y Λ un \mathbb{Z} -submódulo libre de rango 4, el cociente $X \cong V/\Lambda$ es un toro complejo 2-dimensional, X es una superficie analítica compleja, la cual no necesariamente es una superficie algebraica.

(3) Sea X una hipersuperficie lisa de grado d de \mathbb{P}_3 , X es una superficie algebraica.

Date: September 5, 2011.

Partially supported by Fondecyt #1080030 and Dgip of UTFSM.

2.2. Funciones y formas. Sea X una superficie analítica compleja, para cada $p \in X$ existe una carta local (U, φ) donde U es un abierto alrededor de p en X y $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}^2$ es un homeomorfismo, si $\varphi(U) = V$, $\varphi(p) = q$, $(z_1, z_2) \in V \subset \mathbb{C}^2$ y $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ entonces (x_1, y_1, x_2, y_2) son coordenadas locales reales en $q \in V$.

Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función, $p \in X$, diremos que f es diferenciable en p si para cada carta (U, φ) en p la expresión de f en esa carta local es diferenciable. Es decir la función:

$$f \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}$$

es una función diferenciable en q de las variables reales (x_1, y_1, x_2, y_2) .

Una 1-forma diferencial ω en la carta local (U, φ) es una expresión:

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dy_1 + f_3 dx_2 + f_4 dy_2$$

donde las funciones $f_i(x_1, y_1, x_2, y_2)$, $i \in \{1, \dots, 4\}$ son funciones diferenciables en $\varphi(U) = V$. Obviamente esta expresión se transforma si la expresamos en otra carta local (W, ψ) alrededor de p . Así por ejemplo si F es una función diferenciable en V , la diferencial dF es una 1-forma diferenciable, en la cual $f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$

Una 1-forma diferencial global en X puede ser vista como una colección de expresiones locales, una en cada elección de las cartas locales, transformandose entre ellas de acuerdo a los cambios de cartas de la variedad X .

El espacio tangente a $q \in V$ es denotado por $T_q V$ y el es generado como \mathbb{R} -espacio vectorial por $\{dx_1, dy_1, dx_2, dy_2\}$, podemos considerar los espacios vectoriales

$$\wedge^0 T_q V \cong \mathbb{R} \quad \wedge^1 T_q V \cong \mathbb{R}^4 \quad \wedge^2 T_q V \cong \mathbb{R}^6 \quad \wedge^3 T_q V \cong \mathbb{R}^4 \quad \wedge^4 T_q V \cong \mathbb{R}$$

Si $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dy_1 + f_3 dx_2 + f_4 dy_2$ es una 1-forma diferencial, podemos definir una 2-forma diferencial $d\omega = df_1 \wedge dx_1 + df_2 \wedge dy_1 + df_3 \wedge dx_2 + df_4 \wedge dy_2$. Si $\mathcal{E}^k(V)$ denota el espacio vectorial de k -formas diferenciales en V se tiene la sucesión exacta de espacios vectoriales:

Uno puede substituir las variables (x_1, y_1, x_2, y_2) por las variables $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2$, la forma ω la podemos expresar en la carta local (U, φ) mediante:

$$\omega = g_1 dz_1 + g_2 d\bar{z}_1 + g_3 dz_2 + g_4 d\bar{z}_2$$

donde las funciones $g_i(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)$, $i \in \{1, \dots, 4\}$ son funciones diferenciables en $\varphi(U)$.

Una forma ω puede entonces descomponerse en las componentes que contiene a dz_1 y dz_2 , la cual es llamada la parte de tipo $(1, 0)$ y las componentes que contiene a $d\bar{z}_1$ y $d\bar{z}_2$, la cual es llamada la parte de tipo $(0, 1)$.

Si consideramos $dz_1, dz_2, d\bar{z}_1, d\bar{z}_2$, una 2-forma localmente es una expresión:

$$\begin{aligned} & f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) dz_1 \wedge dz_2 \\ & g_1 dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + g_2 dz_1 \wedge d\bar{z}_2 + g_3 dz_2 \wedge d\bar{z}_1 + g_4 dz_2 \wedge d\bar{z}_2 \\ & h d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 \end{aligned}$$

la primera línea es la parte $(2, 0)$, la segunda la parte $(1, 1)$ y la tercera la parte $(0, 2)$.

En general se denota por \mathcal{E}^n el haz de n -formas diferenciales en X y por $\mathcal{E}^{p,q}$ el haz de $(p+q)$ -formas de tipo (p, q) , como en nuestro caso $\wedge^n \mathbb{R}^4 \cong \{0\}$ para $n \geq 4$, bastara n -formas diferenciales de grado menor o igual que 4.

las formas holomorfas y meromorfas siempre son de tipo $(p, 0)$ teniendo como coeficientes a funciones holomorfas o meromorfas respectivamente. El haz de p -formas holomorfas es denotado por Ω^p , habitualmente Ω^0 denota el haz \mathcal{O} de funciones holomorfas, el haz de 2-formas meromorfas es denotado por \mathcal{M}^2 .

Recordemos que una k -forma diferencial definida en el abierto $U \subseteq \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ a valores complejos es una expresión:

$$\omega = \sum_{|I|=p, |J|=q} f_{I,J}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_q}$$

donde las $f_{I,J}$ son funciones de clase C^∞ en U a valores complejos y $p + q = k$, denotaremos por $\mathcal{E}^k(U)$ al conjunto de las k -formas anteriores.

El operador de diferenciación exterior, el cual opera separadamente en las partes reales e imaginarias puede extenderse en un operador:

$$d : \mathcal{E}^k(U) \rightarrow \mathcal{E}^{k+1}(U)$$

una k -forma ω es cerrada si $d\omega = 0$, una k -forma η es exacta si existe una $(k-1)$ -forma μ de manera que $\eta = d\mu$, la q -ésima cohomología de de Rham es el espacio vectorial:

$$H_{DR}^q(U) \cong \frac{\{k - \text{formas cerradas}\}}{\{k - \text{formas exactas}\}}$$

si los coeficientes de las formas involucradas utilizamos solamente funciones con soporte compacto, la q -ésima cohomología de de Rham con soporte compacto la denotaremos por $H_c^q(U)$.

Recordemos que si x_1, \dots, x_n e y_1, \dots, y_m son las coordenadas standar de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m respectivamente, cada aplicación $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ de clase C^∞ induce una aplicación $f^* : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^m)$ via $f^*(g) = g \circ f$, llamada comunmente la aplicación de pullback. Esta aplicación se extiende a una aplicación de las algebras de todas las formas diferenciales

$$f^* : \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m)$$

que conmuta con el operador d . La aplicación de pullback se extiende a la categoria de las variedades de clase C^∞

Se tiene el lema de Poincaré:

Lema 2.1. *Para la cohomología de de Rham con soporte compacto se tiene:*

$$H_c^q(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}, \text{ si } q = m \quad H_c^q(\mathbb{R}^m) = \{0\} \text{ si } q \neq m$$

Sea M una variedad analítica compleja de dimensión n , M es una variedad diferenciable lisa orientable de dimensión real $m = 2n$ y \mathcal{E}_M^k el haz de k -formas diferenciales en la variedad M , del lema de Poincaré se tiene la sucesión exacta

$$\{0\} \rightarrow \mathbb{C}_M \rightarrow \mathcal{E}_M^0 \rightarrow \mathcal{E}_M^1 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{E}_M^k \rightarrow \dots$$

Como la variedad M tiene una partición suave de la unidad, los haces \mathcal{E}_M^k son finos y se tiene

$$H^p(M, \mathcal{E}_M^k) \cong \{0\} \quad p > 0$$

entonces se tiene:

$$H^q(M, \mathbb{C}_M) \cong \frac{\text{Ker}[d : H^0(M, \mathcal{E}_M^k) \rightarrow H^0(M, \mathcal{E}_M^{k+1})]}{\text{Im}[d : H^0(M, \mathcal{E}_M^{k-1}) \rightarrow H^0(M, \mathcal{E}_M^k)]}$$

Sea $\omega \in \mathcal{E}^{p,0}(U)$ diremos que ω es una p -forma diferencial holomorfa en U si $\bar{\partial}(\omega) = 0$, denotaremos por Ω_U^p al conjunto de las p -formas diferenciales holomorfas en U . Si consideramos Ω_U^p como un \mathbb{C} -espacio vectorial tendremos una sucesión exacta de espacios vectoriales:

$$\{0\} \rightarrow \Omega_U^p \rightarrow \mathcal{E}^{p,0}(U) \rightarrow \mathcal{E}^{p,1}(U) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{E}^{p,q}(U) \rightarrow \dots$$

los haces Ω_M^p son llamados los haces de p -formas diferenciales holomorfas, como la sucesión:

$$\{0\} \rightarrow \mathbb{C}_M \rightarrow \Omega^0 \rightarrow \Omega^1 \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_M^p \rightarrow \dots$$

es una resolución para el haz constante \mathbb{C}_M , la sucesión:

$$\{0\} \rightarrow \Omega_M^p \rightarrow \mathcal{E}_M^{p,0} \rightarrow \mathcal{E}_M^{p,1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{E}_M^{p,q} \rightarrow \dots$$

es un resolvente fino del haz Ω_M^p del teorema de Dolbeaut se tiene:

$$H^q(M, \Omega_M^p) \cong \frac{\text{Ker}[\bar{\partial} : H^0(M, \mathcal{E}_M^{p,q}) \rightarrow H^0(M, \mathcal{E}_M^{p,q+1})]}{\text{Im}[\bar{\partial} : H^0(M, \mathcal{E}_M^{p,q-1}) \rightarrow H^0(M, \mathcal{E}_M^{p,q})]}$$

2.3. Divisores. Sea X una variedad analítica compleja de dimensión 2, una subvariedad irreducible de dimensión 1 de X será llamada un divisor primo de X . Una suma localmente finita:

$$D = \sum_i a_i D_i$$

donde cada D_i es un divisor primo y $a_i \in \mathbb{Z}$ es un divisor de X . Localmente finita significa que para cada $p \in X$ existe una vecindad abierta U_p que interseca solamente un número finito de los D_i , en particular si X es compacta se tiene que la suma anterior se realiza sobre un número finito de índices i .

La reunión de todos los D_i se llama el soporte del divisor, si todos los a_i son positivos diremos que el divisor D es efectivo. Denotaremos por $\text{Div}(X)$ el grupo abeliano de los divisores de X , es un \mathbb{Z} -módulo. Si X es compacta, el grupo $\text{Div}(X)$ es el grupo abeliano libre generado por los divisores primos de X .

Sea f una función meromorfa en X , podemos asumir que en una vecindad U de $p \in X$ $f/U = \frac{g}{h}$ con g, h funciones holomorfas, sin factores primos en común y h no idénticamente nula. Si $g = g_1^{n_1} \cdot \dots \cdot g_k^{n_k}$ y $h = h_1^{n_1} \cdot \dots \cdot h_l^{n_l}$, denotaremos por $(g)_0$ y $(h)_\infty$ respectivamente a los divisores:

$$(g)_0 = \sum_{i=1}^{i=k} n_i \{g_i = 0\} \quad (h)_\infty = \sum_{i=1}^{i=l} n_i \{h_i = 0\}$$

les llamaremos el divisor de los ceros y el divisor de los polos. Al divisor:

$$\text{Div}(f) = (g)_0 - (h)_\infty$$

le llamaremos un divisor principal. Los divisores principales son un subgrupo de $\text{Div}(X)$, el grupo cociente es el grupo de clases de divisores de X y será denotado por: $\text{Cl}(M)$. Dos divisores D y D' pertenecen a la misma clase si $D - D' = \text{Div}(f)$

Sea D un divisor en X podemos considerar el conjunto consistente del 0 y de las funciones meromorfas f no nulas tales que $(f) + D$ es un divisor efectivo, es decir: $(f) + D \geq 0$. Este es un espacio vectorial que denotaremos por $\mathcal{L}(D)$, él es de dimensión finita si X es una variedad proyectiva.

2.4. Clase canónica. Sea $\{(U_i, \varphi_i)/i \in I\}$ un atlas en la variedad X un divisor en X esta dado por una familia de funciones $\{(f_i)/i \in I\}$ cada una meromorfa en U_i y que satisfagan:

- (1) Las funciones (f_i) no son idénticamente nulas.
- (2) Para cualquier par de índices (i, j) , $f_i \cdot f_j^{-1}$ y $f_j \cdot f_i^{-1}$ son holomorfas en $U_i \cap U_j$.

Sea $\dim(X) = 2$ y $p \in X$, supongamos que $p \in U_i$, $\varphi_i(p) \in \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{C}^2$, una base para el espacio cotangente a X en el punto p , denotado por T_p^*X esta dada en la carta (U_i, φ_i) por: dz_1, dz_2 donde

z_1, z_2 son coordenadas locales del abierto $\varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{C}^2$. Sea $\omega \in \wedge^2 T_p^* X$, la expresión de ω en la cartas locales (U_i, φ_i) y (U_j, φ_j) esta dada por:

$$\omega/U_i = g^i(z_1, z_2) dz_1 \wedge dz_2 \quad \omega/U_j = g^j(w_1, w_2) dw_1 \wedge dw_2$$

en la intersección $U_i \cap U_j$ se tiene:

$$g^i(z_1, z_2) = g^j(w_1, w_2) J\left(\frac{z_1, z_2}{w_1, w_2}\right)$$

el jacobiano

$$J\left(\frac{z_1, z_2}{w_1, w_2}\right)$$

es holomorfo no nulo en cada intersección $U_i \cap U_j$, la forma diferencial meromorfa $\omega \in \wedge^2 T_p^* X$ determina un divisor en X , llamado el divisor de ω y denotado por (ω) .

Proposición 2.1. Sean $\omega_1, \omega_2 \in \wedge^2 T_p^* X$ entonces los divisores (ω_1) y (ω_2) estan en la misma clase de $Cl(X)$.

Demostración: Sean $\omega_1, \omega_2 \in \wedge^2 T_p^* X$, $\omega_2 = f \cdot \omega_1$ con f meromorfa, entonces:

$$(\omega_2) = (f \cdot \omega_1) = (f) + (\omega_1)$$

y los divisores son equivalentes. □

Sea $\omega \in \wedge^2 T_p^* X$, la clase del divisor determinado por ω es llamada la clase canónica de X y será denotada por K_X , al espacio vectorial $\mathcal{L}(K_X)$ lo denotaremos habitualmente por $H^0(X, K_X)$ y su dimensión será el género geométrico de X .

2.5. Invariantes numéricos. Como X es una variedad lisa compacta conexa de dimensión real 4, podemos considerar sus grupos de homología simplicial, denotamos por.

$$b_i = \text{rank} H^i(X, \mathbb{Z}) = \dim_{\mathbb{R}} H^i(X, \mathbb{R}) = \dim_{\mathbb{C}} H^i(X, \mathbb{C})$$

los números b_i , $i \in \{1, \dots, 4\}$ se llaman los números de Betti de X . La característica topológica de Euler es la suma alternada de los números de Betti:

$$\chi_t(X) = \sum_{i=0}^4 (-1)^i b_i$$

La irregularidad de X es la dimensión del espacio vectorial de 1-formas holomorfas globales: $q = \dim H^0(X, \Omega^1)$ y el género geométrico es la dimensión del espacio vectorial de 2-formas holomorfas globales $p_g = \dim H^0(X, \Omega^2)$. Se pueden definir los números de Hodge de X como: $h^{p,q} = \dim H^q(X, \Omega^p)$ se tiene que la irregularidad $q = h^{1,0}$ y el género geométrico es $p_g = h^{2,0}$

Si X es una superficie algebraica, podemos utilizar la teoría de Hodge para la descomposición de su cohomología, se tiene entonces:

$$h^{p,q} = h^{q,p} = h^{2-p,2-q} = h^{2-q,2-p}$$

$$b_i = \sum_{p+q=i} h^{p,q} \quad b_0 = b_4 = 1$$

estos números se pueden colocar en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 1 \\ & & & & \\ & & & q & q \\ & & & h^{1,1} & \\ p_g & & & & p_g \\ & & & q & q \end{array}$$

el cual es llamado el diamante de Hodge.

2.6. Grupo de Néron-Severi. Consideremos la sucesión exacta de haces

$$\{0\} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow \{0\}$$

y la sucesión exacta de cohomología:

$$\{0\} \rightarrow H^0(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow H^1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X)$$

como $b_0 = 1$, $H^0(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, siendo X compacta y conexa $H^0(X, \mathcal{O}_X) \cong \mathbb{C}$, $H^0(X, \mathcal{O}_X^*) \cong \mathbb{C}^*$, $b_1 = h^{1,0} + h^{0,1} = 2q$, $H^1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2q}$ y finalmente $H^1(X, \mathcal{O}_X) \cong H^0(X, \Omega^1) \cong \mathbb{C}^q$. En la sucesión de cohomología asociada

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X)$$

podemos identificar el grupo $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ de clases de isomorfía de fibrados en recta de X con el grupo de divisores de X módulo equivalencia lineal, denotado por $\text{Pic}(X)$

$$\mathbb{Z}^{2q} \longrightarrow \mathbb{C}^q \longrightarrow \text{Pic}(X) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{u} H^2(X, \mathcal{O}_X)$$

la aplicación c_1 que a una clase de divisores en X asocia un elemento en $H^2(X, \mathbb{Z})$ es llamada la primera clase de Chern, su imagen módulo torsión es llamado el grupo de Néron-Severi de X y denotado por $NS(X)$. El grupo de Picard $\text{Pic}(X)$ tiene una parte continua la que es el toro complejo q -dimensional $\mathbb{C}^q / \text{Image}(\mathbb{Z}^{2q})$, aparece entonces como una extensión de un toro T y del grupo abeliano finitamente generado $NS(X)$. El rango de $NS(X)$ es llamado el número de Picard de X y denotado por ρ_X .

Se tiene la descomposición de Hodge:

$$H^2(X, \mathbb{C}) \cong H^0(X, \Omega_X^2) \oplus H^1(X, \Omega_X^1) \oplus H^2(X, \Omega_X^0)$$

$H^2(X, \Omega_X^0) \cong H^2(X, \mathcal{O}_X)$, $\text{Image}(c_1) = \ker(u)$, como $H^2(X, \mathbb{Z}) \subset H^2(X, \mathbb{C})$ cada clase en $\text{Image}(c_1)$ considerada en $H^2(X, \mathbb{C})$ debe estar en el núcleo de

$$\pi : H^0(X, \Omega_X^2) \oplus H^1(X, \Omega_X^1) \oplus H^2(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X)$$

de manera similar se puede probar que que ella también es nula en $H^0(X, \Omega_X^2)$ y entonces cada clase de $\text{Image}(c_1)$ yace en $H^1(X, \Omega_X^1)$.

Un teorema de Lefschetz prueba que una clase en $H^2(X, \mathbb{Z})$ es la clase de un divisor si y solamente si cuando ella se considera en $H^2(X, \mathbb{C})$ ella yace en la componente $H^1(X, \Omega_X^1)$. Intuitivamente los divisores de X estan entonces controlados de acuerdo a la forma en que el subespacio complejo $H^1(X, \Omega_X^1)$ intersekte al subgrupo discreto $H^2(X, \mathbb{Z})$.

2.7. El plano proyectivo complejo. Consideramos el plano proyectivo complejo \mathbb{P}_2 con cordenadas homogéneas $(z_0 : z_1 : z_2)$, ella es una superficie algebraica, tenemos la descomposición celular:

$$\mathbb{P}_2 = \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{C}^1 \cup \{p\}$$

como la aplicación borde $\partial : e^{2k} \rightarrow e^{2k-1}$ es nula tenemos que: $H_i(\mathbb{P}_2, \mathbb{Z}) = \{0\}$ si i es impar, $0 < i < 4$.

Si definimos $P_i(\mathbb{C}) = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}_2 \mid z_{i+1} = \dots = z_2 = 0\}$ tenemos la descomposición:

$$P_0(\mathbb{C}) \subset P_1(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}_2$$

donde cada $P_i(\mathbb{C}) - P_{i-1}(\mathbb{C})$ es isomorfo a \mathbb{C}^i , cada $P_i(\mathbb{C})$ corresponde a una clase de homología $[P_i] \in H_{2i}(\mathbb{P}_2, \mathbb{Z})$. Tendremos entonces:

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{P}_2, \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z} & H^1(\mathbb{P}_2, \mathbb{Z}) &\cong \{0\} & H^2(\mathbb{P}_2, \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z} \\ H^3(\mathbb{P}_2, \mathbb{Z}) &\cong \{0\} & H^4(\mathbb{P}_2, \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Para los números de Betti y la característica de Euler topológica se tiene:

$$b_1 = b_3 = 0 \quad b_2 = 1 \quad \chi(\mathbb{P}_2) = 3$$

como $H^q(\mathbb{P}_2, \Omega^p) = \{0\}$ si $p \neq q$ y $H^q(\mathbb{P}_2, \Omega^p) = \mathbb{C}$, entonces $q = 0$ y $p_g = 0$. Para los números de Hodge se tiene:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 1 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 \end{array}$$

La sucesión exacta

$$H^1(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}) \longrightarrow \text{Pic}(\mathbb{P}_2) \xrightarrow{c_1} H^2(\mathbb{P}_2, \mathbb{Z})$$

se transforma en:

$$\{0\} \longrightarrow \text{Pic}(\mathbb{P}_2) \xrightarrow{c_1} \mathbb{Z}$$

entonces $\text{Pic}(\mathbb{P}_2) \cong \mathbb{Z}$ y cada divisor es linealmente equivalente a un múltiplo de una recta.

2.8. Superficies abelianas. Sea $X \cong \mathbb{C}^2/L$ un toro analítico complejo 2-dimensional, es decir una superficie abeliana, se tiene claramente que $\pi_1(X) \cong H_1(X, \mathbb{Z})$, el producto cup induce una aplicación:

$$\text{cup} : \wedge^n H^1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(X, \mathbb{Z})$$

que es un isomorfismo, entonces se tiene:

$$\begin{aligned} H^0(X, \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z} & H^1(X, \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}^4 & H^2(X, \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}^6 \\ H^3(X, \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}^4 & H^4(X, \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z} \end{aligned}$$

de donde para los números de Betti y la característica de Euler topológica se tiene:

$$b_0 = b_4 = 1 \quad b_1 = b_3 = 4 \quad b_2 = 6 \quad \chi_t(X) = 0$$

Si (z_1, z_2) son coordenadas en \mathbb{C}^2 ellas descienden a X y se tienen coordenadas locales que están bien definidas módulo las translaciones por L . Las 1-formas dz_1, dz_2 y la forma $\omega = dz_1 \wedge dz_2$ están bien definidas globalmente y generan a $H^0(X, \Omega^1)$ y $H^0(X, \Omega^2)$ de donde la irregularidad es $q = 2$ y el género geométrico es $p_g = 1$. Como la forma $\omega = dz_1 \wedge dz_2$ no tiene polos ni ceros en X , la clase canónica K_X es trivial. Para los números de Hodge se tiene:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 1 \\ & & & & 2 & 2 \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 2 & 2 \\ & & & & & & 1 \end{array}$$

El reticulado $H^2(X, \mathbb{Z})$ puede intersectar a $H^1(X, \Omega^1) \subset H^2(X, \mathbb{C})$ en cualquier rango comprendido entre 0 y 4. Si el rango fuese 0 no habrían divisores amplios en X y X no sería una superficie algebraica.

Un toro analítico complejo 2-dimensional es una variedad algebraica proyectiva si y solamente si existe una forma bilineal

$$H : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que $H(ix, y)$ sea simétrica y positiva definida y además restringida al reticulado L tome valores racionales. La forma H es una polarización en X , tradicionalmente llamada una forma de Riemann.

Sea L el reticulado de \mathbb{C}^2 generado por los vectores $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (i, 0)$, $v_3 = (\pi\sqrt{2}, \pi)$ y $v_4 = (\sqrt{2}, i)$. Se puede probar que para el toro analítico complejo 2-dimensional $X \cong \mathbb{C}^2/L$ no puede existir una forma de Riemann, entonces el no es una superficie algebraica.

3. SUPERFICIES K3

3.1. Generalidades.

Definición 1. Una superficie algebraica X es una superficie K3 si $q_X = h^{0,1} = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ y la clase canónica $K_X = 0$ (es decir $\Omega_X^2 \cong \mathcal{O}_X$)

Puesto que $\Omega_X^2 \cong \mathcal{O}_X$, $p_g = \dim H^0(X, \Omega_X^2) = 1$, X admite una 2-forma $\omega_X \in \wedge^2 \Omega_X^1$ holomorfa nunca nula, llamada la forma simpléctica. Como

$$H^0(X, \mathcal{O}_X) \cong \mathbb{C} \quad H^1(X, \mathcal{O}_X) \cong \{0\} \quad H^2(X, \mathcal{O}_X) \cong H^0(X, \Omega_X^2) \cong \mathbb{C}$$

como X es algebraica proyectiva, de la dualidad de Poincaré y del teorema de la sección hiperplana de Lefschetz se tiene

$$\dim_{\mathbb{Z}} H^0(X, \mathbb{Z}) = \dim_{\mathbb{Z}} H^4(X, \mathbb{Z}) = 1 \quad \dim_{\mathbb{Z}} H^1(X, \mathbb{Z}) = \dim_{\mathbb{Z}} H^3(X, \mathbb{Z}) = 0$$

de un importante teorema de Noether se puede obtener que $\chi_t(X) = 24$ se tiene que $H^2(X, \mathbb{Z})$ es un \mathbb{Z} -módulo libre de rango 22.

En el espacio vectorial $H^2(X, \mathbb{C})$ el producto cup

$$\mu \cdot \nu = \int_X \mu \wedge \nu, \quad \mu, \nu \in H^2(X, \mathbb{C})$$

es una forma bilineal simétrica no degenerada la que dota a $H^2(X, \mathbb{Z})$ de una forma cuadrática unimodular de tipo II, es decir par que denotamos por \langle, \rangle . Del teorema del índice de Hirzebruch, el número valores propios positivos menos el número valores propios negativos es igual a

$$\frac{1}{3}(K_s^2 - 2\chi_t(X)) = -16$$

la signatura es entonces $(3, 19)$, de la clasificación de Serre se tiene para el reticulado

$$L \cong \mathbb{H} \perp \mathbb{H} \perp \mathbb{H} \perp \mathbb{E} \perp \mathbb{E}$$

donde \mathbb{H} es el plano hiperbólico, es decir el reticulado \mathbb{Z}^2 con $e_1 \cdot e_1 = e_2 \cdot e_2 = 0$, $e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = 1$ y \mathbb{E} es el reticulado E_8 con signo cambiado.

Si suponemos que X es una superficie algebraica, siendo ella kahleriana, podemos considerar entonces el diamante de Hodge asociado:

$$\begin{array}{ccccc}
& & & & 1 \\
& & & & 0 & 0 \\
& & & 1 & 20 & 1 \\
& & & 0 & 0 & \\
& & & & & 1
\end{array}$$

Denotamos por ω a un generador de $H^0(X, \Omega_X^2)$, siendo X kahleriana se tiene la descomposición de Hodge:

$$H^2(X, \mathbb{C}) \cong H^0(X, \Omega_X^2) \oplus H^1(X, \Omega_X^1) \oplus H^2(X, \mathcal{O}_X)$$

donde $H^0(X, \Omega_X^2)$ y $H^2(X, \mathcal{O}_X)$ son conjugados y

$$\dim H^0(X, \Omega_X^2) = \dim H^2(X, \mathcal{O}_X) = 1 \quad \dim H^1(X, \Omega_X^1) = 20$$

se puede demostrar que la restricción de \langle, \rangle a $H^1(X, \Omega_X^1) \cap H^2(X, \mathbb{R})$ tiene signatura $(1, 19)$. La cohomología $H^2(X, \mathbb{C})$ depende solo de la topología de X , mientras que la estructura de Hodge depende de la posición de la recta $H^0(X, \Omega_X^2) \cong \mathbb{C}\omega$.

Se tiene que $H^1(X, \Omega_X^1) \subset H^2(X, \mathbb{C})$ es el complemento ortogonal de $\mathbb{C}\omega \oplus \mathbb{C}\bar{\omega}$, el grupo $\text{Pic}(X)$ se inyecta en L y se tiene que $\text{Pic}(X) = H^1(X, \Omega_X^1) \cap L$ es un reticulado de signatura $(1, 19)$. Si X varia en moduli, la posición de $H^1(X, \Omega_X^1)$ varia en L y el número de Picard puede variar entre 0 y 20.

3.2. Cuárticas lisas planas. Sea X una hipersuperficie cuártica lisa de \mathbb{P}_3 , como X es compacta $H^0(X, \mathcal{O}_X) \cong \mathbb{C}$

3.3. Revestimientos dobles del plano.

3.4. Superficies de Kummer. Sea $X \cong \mathbb{C}^2/L$ un toro analítico complejo 2-dimensional, es decir una superficie abeliana, la involución $j(p) = -p$ tiene como puntos fijos a los 16 puntos p_1, p_2, \dots, p_{16} de 2-torsión de X . Denotamos por $\epsilon: \hat{X} \rightarrow X$ el blowing up de estos 16 puntos y $E_i = \epsilon^{-1}(p_i)$ the exceptional curves; j se extiende a una involución σ en \hat{X} , denotamos por K_X al cociente $\hat{X}/\{1, \sigma\}$ y por $\pi: \hat{X} \rightarrow \hat{X}/\{1, \sigma\}$ a la proyección.

Proposición 3.1. *La superficie K_X es una superficie K3, llamada la superficie de Kummer asociada a X .*

Demostración: Veamos primero que K_X es lisa, como $\pi: \hat{X} \rightarrow \hat{X}/\{1, \sigma\}$ es étale fuera de las curvas E_i , bastara ver que es lisa en los puntos $\pi(q)$ con $q \in E_i$. Supongamos que (z_1, z_2) son coordenadas locales en X en una vecindad de p_i de manera que $j(z_1) = -z_1, j(z_2) = -z_2$. Denotemos por $w_1 = \epsilon^*z_1$ y $w_2 = \epsilon^*z_2$, podemos considerar a w_1 y $t = \frac{w_2}{w_1}$ como coordenadas locales en \hat{X} alrededor de q , $\sigma^*w_1 = -w_1$ y $\sigma^*t = t$ entonces t y $u = w_1^2$ son coordenadas en K_X en una vecindad de $\pi(q)$ y K_X es lisa.

La forma 2-forma $\omega = dz_1 \wedge dz_2$ es invariante bajo j , $\epsilon^*\omega$ es invariante bajo σ y desciende a una 2-forma meromorfa η en K_X . El divisor de η esta concentrado en $\pi(E_i)$, en una vecindad de un punto $q \in E_i$ tendremos.

$$\epsilon^*\omega = dw_1 \wedge dw_2 = dw_1 \wedge d(tw_1) = w_1 dw_1 \wedge dt = \frac{1}{2} du \wedge dt$$

$\eta = \frac{1}{2} du \wedge dt$ es holomorfa y nula en $\pi(q)$ y entonces $\text{Div}(\alpha) = 0$.

Supongamos que K_X tenga una 1-forma holomorfa no nula, entonces \hat{X} tendría una 1-forma holomorfa no nula invariante bajo σ . Como la aplicación: $\epsilon : \hat{X} \rightarrow X$ induce un isomorfismo $\epsilon^* : H^0(X, \Omega_X) \rightarrow H^0(\hat{X}, \Omega_{\hat{X}})$, X tendría una 1-forma holomorfa no nula invariante bajo j , lo cual no es posible y entonces $q = 0$. \square

La superficie $Y \cong X / \langle j \rangle$ es una variedad algebraica que tiene exactamente 16 puntos singulares, que son las imágenes de los puntos de 2-torsión de X , denotados por $X[2]$. El grupo $X[2]$ puede ser identificado via un isomorfismo con \mathbb{Z}_2^4 . Si (X, Θ) es una variedad abeliana irreducible principalmente polarizada, la aplicación:

$$\varphi_X = \varphi|_{2\Theta} : X \rightarrow \mathbb{P}_3$$

determinada por el divisor 2Θ se factoriza via una incrustación $\psi : Y \rightarrow \mathbb{P}_3$, su imagen $\psi(Y) = Z$ es una hipersuperficie cuártica con 16 puntos dobles y 16 planos singulares en \mathbb{P}_3 cada uno de ellos cortando a Z a lo largo de una cónica. En X hay exactamente una curva there D tal que la intersección $D \cap X[2]$ tiene 6 puntos, entonces los 16 planos singulares y los 16 puntos singulares forman una 16_6 -configuración.

REFERENCES

- [1] Séminaire Palaiseau. *Géométrie des surfaces K3: Modules et Périodes*, Astérisque, **126**. Société Mathématique de France, 1985.
- [2] Matsumura, H and Monsky, P. *On the automorphisms of hypersurfaces*. J. Math. Kyoto Univ., **3**, 347-361, 1964.
- [3] Mukai, S. *Finite groups of automorphism of K3 surfaces and the Mathieu group*. Inventiones Mathematicae, **94**, 183-221, 1988.
- [4] Segre, B. *On the quartic surface $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 0$* . Oxford Quart J., **14**, 121-145, 1943.
- [5] Varley, R. *Weddle's surfaces, Humbert curves, and certain 4-dimensional abelian variety*. American Journal of Mathematics, **108**, 931-952, 1986.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA, CASILLA 110-V, VALPARAÍSO-CHILE

E-mail address: victor.gonzalez@usm.cl