UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS
INTRODUCCIÓN A LAS SUPERFICIES DE RIEMANN Y CURVAS ALGEBRAICAS
MÉTRICAS RIEMANNIANAS

Por: Martha Romero

En este trabajo mostramos que en toda superficie de Riemann podemos introducir una métrica Riemanniana completa de curvatura constante (usualmente negativa). También desarrollamos algunos de los hechos básicos de geometría no euclidiana.

Introduciremos métricas Riemannianas para tres superficies de Riemann simplemente conexas. La métrica de M será de la forma:

$$\lambda(z)|dz|, \qquad z \in M \tag{1}$$

Establecemos:

$$\begin{aligned}
\lambda(z) &= \frac{2}{1+|z|^2}, && \texttt{para} \quad M = \widehat{\mathbb{C}} \\
\lambda(z) &= 1, && \texttt{para} \quad M = \mathbb{C}, \\
\lambda(z) &= \frac{2}{1-|z|^2}, && \texttt{para} \quad M = \triangle = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.
\end{aligned}$$

La definición de λ para $M = \widehat{\mathbb{C}}$ es válida solamente si $z \neq \infty$. En infinito, se obtiene a partir de la coordenada local $\zeta = \frac{1}{z}$. Así,

$$\lambda(\zeta) = \lambda\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{2|z|^2}{1+|z|^2}$$

Veamos cada una de las métricas:

Para $M = \widehat{\mathbb{C}}$, la superficie de Riemann compacta de género cero, denominada la esfera de Riemann, consideremos la esfera unidad S^2,

$$S^2 = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\}.$$

Ahora llevamos $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ en $\mathbb{C}$ por la proyección estereográfica,

$$(\xi, \eta, \zeta) \mapsto \frac{\xi}{1-\zeta} + i\frac{\eta}{1-\zeta} = z$$

con inversa

$$z \xrightarrow{\Pi} \left(\frac{2\mathtt{Re}z}{1+|z|^2}, \frac{2\mathtt{Im}z}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \right) \tag{2}$$

denotemos por $x = \mathtt{Re}z$ y por $y = \mathtt{Im}z$. La métrica euclidiana en $\mathbb{R}^3$:

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$$

induce una métrica en S^2, la cual induce una métrica en $\widehat{\mathbb{C}}$.

De la ecuación (2) se deduce que

$$\begin{aligned}
d\xi &= d\left(\frac{2x}{1+|z|^2}\right) = \frac{2(1-x^2+y^2)dx - 4xydy}{(1+|z|^2)^2}, \\
d\eta &= d\left(\frac{2y}{1+|z|^2}\right) = \frac{-4xydx + 2(1+x^2-y^2)dy}{(1+|z|^2)^2}, \\
d\zeta &= d\left(\frac{x^2+y^2-1}{1+|z|^2}\right) = \frac{4xdx+4ydy}{(1+|z|^2)^2}.
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \left(\frac{2(1-x^2+y^2)dx - 4xydy}{(1+|z|^2)^2}\right)^2 + \left(\frac{-4xydx + 2(1+x^2-y^2)dy}{(1+|z|^2)^2}\right)^2 + \left(\frac{4xdx+4ydy}{(1+|z|^2)^2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{(1+|z|^2)^4}(4(1-x^2+y^2)^2dx^2 - 16xy(1-x^2+y^2)dxdy + 16x^2y^2dy^2 + 4(1+x^2-y^2)^2dy^2 \\
&- 16xy(1+x^2-y^2)dxdy + 16x^2y^2dx^2 + 16x^2dx^2 + 32xydxdy + 16y^2dy2) \\
&= \frac{1}{(1+|z|^2)^4}[4((1-x^2+y^2)^2 + 4x^2y^2 + 4x^2)dx^2 + 4((1+x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 + 4y^2)dy^2] \\
&= \frac{1}{(1+|z|^2)^4}[4(1+|z|^2)^2(dx^2+dy^2)] \\
&= \frac{4(dx^2+dy^2)}{(1+|z|^2)^2}
\end{aligned}$$

Así,

$$ds = \frac{2}{1+|z|^2}|dz|$$

La curvatura K de la métrica (1) está dada por

$$K = -\frac{\triangle \log \lambda}{\lambda^2}$$

donde $\triangle$ es el Laplaciano. En este caso, se tiene que

$$K = +1.$$

En efecto,
$$\frac{\partial}{\partial x}\log\left(\frac{2}{1+x^2+y^2}\right)=\frac{1+x^2+y^2}{2}\cdot\frac{-4x}{(1+x^2+y^2)^2}$$
Luego,
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\left(\frac{2}{1+x^2+y^2}\right)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2x}{1+x^2+y^2}\right)\\&=\frac{-2}{1+x^2+y^2}+\frac{4x^2}{(1+x^2+y^2)^2}=\frac{-2(1+x^2+y^2)+4x^2}{(1+x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$
de igual forma,
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\log\left(\frac{2}{1+x^2+y^2}\right)=\frac{-2(1+x^2+y^2)+4y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$
Así,
$$\begin{aligned}K&=-\frac{\triangle\ \log\lambda}{\lambda^2}\\&=-\frac{\left(\frac{-2(1+x^2+y^2)+4x^2}{(1+x^2+y^2)^2}+\frac{-2(1+x^2+y^2)+4y^2}{(1+x^2+y^2)^2}\right)}{\frac{4}{(1+|z|^2)^2}}\\&=\frac{\frac{4(1+|z|)-4|z|}{(1+|z|)^2}}{\frac{4}{(1+|z|)^2}}\\&=1.\end{aligned}$$
Además, el área de $\widehat{\mathbb{C}}$ en esta métrica es:
$$\mathtt{Área}(\widehat{\mathbb{C}})=\int\int_C\lambda(z)^2dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{4}{(1+r^2)^2}rdrd\theta=4\pi.$$
Proposición 1. *Un elemento $T\in$ $\mathtt{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ es una isometría en la métrica $\lambda(z)=\frac{2}{1+|z|^2}$ si y solo si*
$$T=\begin{pmatrix} a & -\overline{c}\\ c & \overline{a}\end{pmatrix},\qquad |a|^2+|c|^2=1.$$
Demostración. Sea $T\in$ $\mathtt{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$, entonces
$$T=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix},\qquad ad-bc=1.$$
T es una isometría si y solo si
$$\lambda(T(z))|T'(z)|=\lambda(z),\qquad z\in\widehat{\mathbb{C}}$$

o equivalentemente si y solo si

$$\frac{1}{|cz+d|^2+|az+b|^2}=\frac{1}{1+|z|^2}. \tag{3}$$

Para la primera implicación, supongamos que $T\in$ $\texttt{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ es una isometría, entonces se tiene (3), luego

$$1+|z|^2=|cz+\overline{a}|^2+|az+b|^2$$

expandiendo el lado derecho de la igualdad:

$$1+|z|^2=(|a|^2+|c|^2)|z|^2+(c\overline{d}+a\overline{b})z+(d\overline{c}+b\overline{a})+|b|^2+|d|^2,$$

y para que está igualdad se alcance, se debe tener que:

$$|a|^2+|c|^2=1, \qquad |b|^2+|d|^2=1, \qquad c\overline{d}+a\overline{b}=0.$$

además $-cb+ad=1$, luego

$$\begin{aligned} c\overline{d}+a\overline{b}=0 &\Leftrightarrow cb\overline{d}+ab\overline{b}=0\\ &\Leftrightarrow (ad-1)\overline{d}+ab\overline{b}=0\\ &\Leftrightarrow a(|d|^2+|b|^2)-\overline{d}=0\\ &\Leftrightarrow a=\overline{d}. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} c\overline{d}+a\overline{b}=0 &\Leftrightarrow \overline{a}c\overline{d}+\overline{a}a\overline{b}=0\\ &\Leftrightarrow (1+\overline{c}\overline{b})c+|a|^2\overline{b}=0\\ &\Leftrightarrow \overline{b}(|c|^2+|a|^2)+c=0\\ &\Leftrightarrow c=-\overline{b}. \end{aligned}$$

Luego

$$T=\begin{pmatrix} a & -\overline{c}\\ c & \overline{a}\end{pmatrix}, \qquad |a|^2+|c|^2=1.$$

Recíprocamente, si

$$T=\begin{pmatrix} a & -\overline{c}\\ c & \overline{a}\end{pmatrix}, \qquad |a|^2+|c|^2=1.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|cz+\overline{a}|^2+|az-\overline{c}|^2} &= \frac{1}{(cz+\overline{a})(\overline{cz}+a)+(az-\overline{c})(\overline{az}-c)}\\ &= \frac{1}{|a|^2+|c|^2|z|^2+cza+\overline{cza}+|a|^2|z|^2-azc-\overline{caz}+|a|^2|z|^2+|c|^2}\\ &= \frac{1}{|a|^2+|c|^2|z|^2+|a|^2|z|^2+|a|^2|z|^2+|c|^2}\\ &= \frac{1}{|a|^2(1+|z|^2)+|c|^2(1+|z|^2)}=\frac{1}{1+|z|^2} \end{aligned}$$

diferenciable en $\{z \in \Omega : \lambda(z) > 0\}$. Si $z \in \Omega$ y $\xi \in \mathbb{C}$ es un vector entonces definimos la longitud de ξ en z como

$$|\xi|_{\lambda,z} = \lambda(z)|\xi|,$$

donde $|\xi|$ denota la longitud euclídea.

En análisis clásico estas métricas se llaman a veces métricas conformes y se suelen escribir de la forma $\lambda(z)|dz|$ y a la función λ se le llama densidad de la métrica.

Dada una curva continuamente diferenciable $\gamma : [a, b] \to \Omega$ vamos a definir su longitud en la métrica como

$$L_\lambda(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|_{\lambda,\gamma(t)}dt$$

La longitud de una curva continuamente diferenciable a trozos se define como la suma de las longitudes de sus trozos continuamente diferenciables.

Sean dos puntos $p, q \in \Omega$, definimos la λ-distancia entre p y q en la métrica como

$$d(p, q) = inf L_\lambda(\gamma) : \gamma \in C_\Omega(p, q),$$

donde $C_\Omega(p, q)$ es el conjunto de todas las curvas continuamente diferenciables a trozos $\gamma : [0, 1] \to \Omega$ tales que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(l) = q$.

La métrica $|dz| \in \mathbb{C}$, requiere una pequeña explicación. Esta es, por supuesto, la métrica Euclidiana. Está tiene curvatura constante cero. Las geodésicas son las líneas rectas y los automorfismos de $\mathbb{C}$ son funciones de la forma:

$$z \mapsto e^{i\theta}z + b \qquad \theta \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}$$

son isometrías en la métrica.

Ahora mostraremos el caso más interesante: El disco unidad $\triangle$. Intentaremos definir una métrica invariante bajo el grupo completo de automorfismos de $\triangle$. La métrica podría ser conformalmente equivalente a la métrica Euclidiana, por lo tanto de la forma $\lambda(z)|dz|$.

Establecemos $\lambda(0) = 2$ y notemos que $\lambda(A(0))|A'(0)| = \lambda(0)$ para todo $A \in \texttt{Aut}(\triangle)$ que fija 0. En efecto, dado que los automorfismos del disco $\triangle$ son transformaciones de la forma

$$A(z) = k\frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0}z}, \quad z \in \triangle, \quad |k| = 1,$$

si $A(0) = 0$, entonces

$$A(0) = k\frac{0 + z_0}{1 + \overline{z_0}(0)} = kz_0 = 0,$$

luego $z_0 = 0$ y

$$A(z) = kz, \quad |k| = 1,$$

así, $A(z) = e^{i\theta}z$ y $A'(z) = e^{i\theta}$, de donde $\lambda(A(0))|A'(0)| = \lambda(0)$.

Sea $z_0 \in \triangle$ arbitrario y tomemos $A \in \texttt{Aut}(\triangle)$ tal que $A(0) = z_0$. Definimos

$$\lambda(z_0) = 2|A'(0)|^{-1}.$$

Notemos que

$$A(z) = \frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0}z}$$

Así,

$$A'(z) = \frac{1 - |z_0|^2}{(1 + \overline{z_0}z)^2},$$

luego

$$A'(0) = \frac{1 - |z_0|^2}{1},$$

De donde se concluye,

$$\lambda(z_0) = \frac{2}{1 - |z_0|^2}.$$

La métrica inducida es invariante bajo cualquier automorfismo del disco $\triangle$, en particular los automorfismos son isometrías en la métrica.

En efecto, recordemos que T es una isometría si y solo si

$$\lambda(T(z))|T'(z)| = \lambda(z)$$

En general, un automorfismo del disco $T : \triangle \to \triangle$ es de la forma:

$$T(z) = k\frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0}z}$$

consideremos dos casos:

(a) Si T es una rotación, entonces $T(z) = kz, \quad |k| = 1$, luego si $t_0 \in \triangle$,

$$\lambda(T(t_0)) = \frac{2}{1 - |T(t_0)|^2} = \frac{2}{1 - |kt_0|^2} = \frac{2}{1 - |t_0|^2} = \lambda(t_0)$$

(b) Si T es de la forma

$$T(z) = \frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0}z}, \quad z_0 \in \triangle,$$

entonces

$$T'(z) = \frac{1 - |z_0|^2}{(1 + \overline{z_0}z)^2},$$

luego

$$\begin{aligned}
\lambda(T(z))|T'(z)| &= \frac{2}{1-|\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}|^2}\frac{1-|z_0|^2}{|1+\overline{z_0}z|^2} \\
& \frac{2|1+\overline{z_0}z|^2}{|1+\overline{z_0}z|^2-|z+z_0|^2}\frac{1-|z_0|^2}{|1+\overline{z_0}z|^2} \\
&= \frac{2(1-|z_0|^2)}{1+|z_0|^2|z|^2-|z|^2-|z_0|^2} = \frac{2(1-|z_0|^2)}{1+|z_0|^2(|z|^2-1)-|z|^2} \\
&= \frac{2(1-|z_0|^2)}{(1-|z|^2)(1-|z_0|^2)} = \frac{2}{1-|z|^2} = \lambda(z)
\end{aligned}$$

Dado que todo automorfismo de $\triangle$ es composición de funciones de la forma (i) o (ii), la afirmación queda probada.

Antes de proceder nos permitimos calcular la fórmula de la métrica en la mitad superior plano U. Dado que queremos que la métrica $\overline{\lambda}(z)|dz|$ sea invariante bajo $\mathtt{Aut}(U)$, requerimos que

$$\widetilde{\lambda}(z_0) = 2|A'(0)|^{-1},$$

donde A es una función conformal de $\triangle$ sobre U tal que $A(0) = z_0$. Un cálculo similar al anterior muestra que

$$\widetilde{\lambda}(z) = \frac{1}{Imz}.$$

esta métrica así definida tiene curvatura constante de valor -1.

Sea $c : I \to \triangle$ un camino suave, $I = [0, 1]$. Entonces, su longitud $l(c)$ está definida por

$$l(c) = \int_0^1 \lambda(c(t))|c'(t)|dt. \tag{4}$$

Podemos introducir ahora una función distancia en $\triangle$ definida por

$$d(a,b) = \text{ínf}\{l(c), c \;\; \texttt{es un camino suave a trozos uniendo a} \;\; a \;\; \texttt{con} \;\; b \;\; \texttt{en} \;\; \triangle\}. \tag{5}$$

Consideremos, $a = 0$ y $b = x$, real, $0 \leq x < 1$, y $c(t) = xt$, con $0 \leq t \leq 1$. La longitud $l(c)$ es:

$$\begin{aligned}
l(c) &= \int_0^1 \frac{2}{1-|c(t)|^2}|c'(t)|dt \\
&= \int_0^1 \frac{2}{1-x^2t^2}(1-x)dt = \int_0^x \frac{2}{1-u^2}du \quad u = xt \quad du = xdt \\
&= \int_0^x \frac{2}{(1-u)(1+u)}du = \int_0^x \frac{du}{1-u} + \int_0^x \frac{du}{1+u} \\
&= \log\frac{1+u}{1-u}\bigg|_0^x = \log\frac{1+x}{1-x}.
\end{aligned}$$

Para calcular, la distancia desde $a = 0$ hasta b, como λ es invariante bajo rotación, podemos suponer que $b = x$ es real y positivo, y sin pérdida de generalidad, podemos considerar solamente la curva suave $c(t)$, con $0 \leq t \leq 1$, que une a a, con b así:

$$\begin{aligned}
l(c) &= \int_0^1 \frac{2}{1-|c(t)|^2}|c'(t)|dt \\
&\geq \left| \int_0^1 \frac{2}{1-(c(t))^2} c'(t)dt \right| = \left| \int_0^x \frac{2}{1-u^2} du \right| \quad u = c(t) \quad du = c'(t)dt \\
&= \left| \int_0^x \frac{2}{(1-u)(1+u)} du \right| = \left| \int_0^x \frac{du}{1-u} + \int_0^x \frac{du}{1+u} \right| \\
&= \left| \log \frac{1+u}{1-u} \Big|_0^x \right| = \left| \log \frac{1+x}{1-x} \right| \geq \log \frac{1+x}{1-x}.
\end{aligned}$$

de modo que:

$$d(0,b) = \log \frac{1+b}{1-b},$$

y que $c(t) = tx$, $0 \leq t \leq 1$, es la única geodésica que une a 0 con x. Ahora, sea $0 \neq b = z \in \triangle$ arbitrario (y tomemos $a = 0$). Dado que

$$\zeta \mapsto e^{-i\theta}\zeta, \qquad \theta = \arg z$$

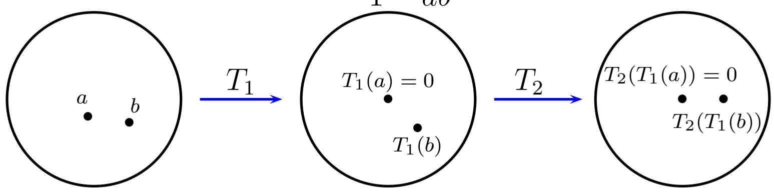
es una isometría en la métrica no Euclidiana $\lambda(z)|dz|$, vemos que

$$d(0,z) = \log \frac{1+|z|}{1-|z|}, \tag{6}$$

y $c(t) = tz$, $0 \leq t \leq 1$, es la única geodésica uniendo 0 con z.

Observación 3. *Notemos que si a y b son puntos cualesquiera en el disco, entonces sea:*

$$T_1(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}b},$$



$T_1 : \triangle \longrightarrow \triangle$ y $T_1(a) = 0$, $T_1(b) = \frac{b-a}{1-\overline{a}b}$ y sea: T_2, la rotación que lleva a $T_1(b)$ al eje real, entonces:

$$\begin{aligned}
d(a,b) &= d(T_1(a), T_1(b)) \\
&= d(T_2(T_1(a)), T_2(T_1(b))) \\
&= d(0,x), \quad x = T_2(T_1(b))) \\
&= \log \frac{1+x}{1-x}
\end{aligned}$$

Notemos que $x = |T_1(b)|$, *esto es* $x = \left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|$, *luego*

$$d(a,b) = \log\left(\frac{1+\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|}{1-\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|}\right)$$

Es claro que d es una métrica en el disco $\triangle$, en efecto:

1. $d(x,y) \geq 0$, para todo x, $y \in \triangle$ y $d(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$

2. $d(x,y) = d(y,x)$, para todo x, $y \in \triangle$

3. sean x, y, $z \in \triangle$,para probar que:

   $$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y),$$

   dado que los automorfismos del disco, $Aut(\triangle)$ son isométrias, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $z = 0$ y que $y \in (0,1)$, así:

   $$\begin{aligned} d(x,y) &= \ln\left(\frac{1+|\frac{x-y}{1-\overline{x}y}|}{1-|\frac{x-y}{1-\overline{x}y}|}\right), \\ d(x,z) &= \ln\left(\frac{1+|x|}{1-|x|}\right), \\ d(z,y) &= \ln\left(\frac{1+|y|}{1-|y|}\right), \end{aligned}$$

   por otra parte,

   $$\begin{aligned} \frac{1+|\frac{x-y}{1-\overline{x}y}|}{1-|\frac{x-y}{1-\overline{x}y}|} &= \frac{\left(1+|\frac{x-y}{1-\overline{x}y}|\right)^2}{1-|\frac{x-y}{1-\overline{x}y}|^2} = \frac{(|1-\overline{x}y|+|x-y|)^2}{(1-|x|)^2(1-|y|)^2} \\ &\leq \frac{(1+|x||y|+|x||y|)^2}{(1-|x|)^2(1-|y|)^2} = \left(\frac{1+|x|}{1-|x|}\right)\left(\frac{1+|y|}{1-|y|}\right) \end{aligned}$$

   Ahora, como el logaritmo es una función creciente, se tiene que:

   $$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y),$$

   como se quería probar.

Usando el hecho de que $y \in (0,1)$, podemos ver que la igualdad se tiene si y sólo si $x \in (-\infty, 0)$.

Proposición 4. *La topología inducida por la métrica* $\frac{2}{1-|z|^2}$ *es equivalente a la topología usual en* $\triangle$.

Demostración. Una base para esta topología esta dada por el conjunto de bolas:

$$B(0,r) = \{z : d_\lambda(0,z) < r\}$$

y dado que

$$d_\lambda(0,z) = \log \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} d(0,z) < r &\Leftrightarrow \log \frac{1+|z|}{1-|z|} \\ &\Leftrightarrow \frac{1+|z|}{1-|z|} < e^r \\ &\Leftrightarrow 1+|z| < e^r - e^r|z| \\ &\Leftrightarrow |z| < \frac{e^r-1}{1+e^r} \end{aligned}$$

Luego

$$B(0,r) = \left\{ z : |z| < \frac{e^r-1}{1+e^r} \right\}$$

luego las bolas centradas en el origen son iguales a las bolas en la topología euclidiana. De donde se concluye que la topología es la misma en el origen.

Ahora, el origen puede ser movido a cualquier otro punto $a \in \triangle$ por la transformación:

$$T(z) = \frac{z+a}{1+\overline{a}z}$$

Dado que la métrica es invariante bajo automorfismos del disco y las transformaciones de Möbius toman discos y los envían en discos, luego la topología es igual a la euclidiana en todo punto. ∎

Proposición 5. *El disco unitario* $\triangle$ *con la métrica* $\frac{2}{1-|z|^2}$ *es un espacio métrico completo.*

Demostración. Sea $\{p_j\}$ una sucesión de Cauchy en el disco $\triangle$, con la métrica $\frac{2}{1-|z|^2}$, entonces dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que si n, $m > N$, $d_\lambda(p_m, p_n) < \epsilon$, luego

$$d(p_N, p_j) < 1 + \sup_{0 \le k \le N} d(x_N, x_k)$$

y $d(0,p_j) < d(0,p_N) + d(p_N,p_j) < M$, $\forall j$, esto es la sucesión es acotada. De aquí,

$$\log\left(\frac{1+|p_j|}{1-|p_j|}\right) \le M,$$

de donde

$$|p_j| \leq \frac{e^{2M}-1}{e^{2M}+1} < 1,$$

luego, $\{p_j\}$ está contenida en un conjunto compacto del disco.

Por otra parte, dado $\epsilon > 0$, para $\epsilon' = \log\left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right) > 0$, cuando $\epsilon < 1$ existe $M \in \mathbb{Z}^+$, tal que si $n, m \geq M$, entonces

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{1+|p_n-p_m|}{1-|p_n-p_m|}\right) < \log\left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right) &\Leftrightarrow \frac{1+|p_n-p_m|}{1-|p_n-p_m|} < \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \\
&\Leftrightarrow (1+|p_n-p_m|)(1-\epsilon) < (1-|p_n-p_m|)(1+\epsilon) \\
&\Leftrightarrow |p_n-p_m| + \epsilon|p_n-p_m| < \epsilon \\
&\Leftrightarrow |p_n-p_m| < \frac{\epsilon}{1+\epsilon} < \epsilon
\end{aligned}$$

Si $\epsilon \geq 1$, se considera $\epsilon' = \frac{e-1}{1+e}$ y se obtiene que

$$|p_n - p_m| < \frac{1}{e} < 1 \leq \epsilon,$$

por tanto $\{p_j\}$ es una sucesión de Cauchy en la métrica euclidiana y dado que está contenida en un compacto relativo, se tiene que converge a p (en la métrica euclidiana), $p \in \triangle$, esto es para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{Z}^+$, tal que si $j > N$, entonces $|p_j - p| < \epsilon$. De donde, para todo $\epsilon > 0$, tomando $\epsilon' = \frac{e^\epsilon-1}{e^\epsilon+1}$, existe $N' \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $j > N'$, $|p_j - p| < \frac{e^\epsilon-1}{e^\epsilon+1}$, de donde

$$\log\left(\frac{1+|p_j-p|}{1-|p_j-p|}\right) < \epsilon,$$

esto es $\{p_j\}$ converge en la métrica $\frac{2}{1-|z|^2}$ y por tanto el disco, con está métrica es un espacio métrico completo. ■

Proposición 6.

(a) Las geodésicas en la métrica $\frac{2}{1-|z|^2}$ son los arcos de círculos ortogonales al círculo unidad $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

(b) Dados cualquier par de puntos a, $b \in \triangle$, existe un a única geodésica entre ellos.

Demostración. Ya hemos probado que la única geodésica entre 0 y b es el segmento de línea recta que une a los dos puntos. Sean z_1, z_2 arbitrarios. Escoja $A \in \texttt{Aut}(\triangle)$ tal que $A(z_1) = 0$. Sea $b = A(z_2)$. La geodésica entre z_1 y z_2 es $A^{-1}(c)$, donde c es la porción de el diámetro que une a 0 y b. Dado que A^{-1}´preserva círculos y ángulos, (a) y (b) se verifican.

■

Si D es cualquier subconjunto de $\triangle$ Lebesgue-medible, entonces

$$\texttt{Area}(D) = \frac{1}{2}\int\int_D \lambda(z)^2 |dz \wedge d\overline{z}|$$

define el área no Euclidiana de D.

Vamos a introducir una clase de superficies de Riemann que son de gran interés debido a que van a heredar del disco unidad la métrica hiperbólica (de una forma que precisaremos más adelante) lo cual constituye una herramienta muy potente para generalizar resultados clásicos en el plano complejo (como por ejemplo el Teorema de Picard) a superficies.

Sea $\mathcal{S}$ una superficie de Riemann. Un cubrimiento de $\mathcal{S}$ es un par $(\widetilde{\mathcal{S}}, f)$ donde $\widetilde{\mathcal{S}}$ es una superficie de Riemann y $f : \widetilde{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$ es holomorfa y homeomorfismo local. Si $(\widetilde{\mathcal{S}_1}, f_1)$ es un cubrimiento de $\mathcal{S}$, y $(\widetilde{\mathcal{S}_2}, f_2)$ es una superficie de cubrimiento de $\widetilde{\mathcal{S}_1}$, está claro que entonces $(\widetilde{\mathcal{S}_2}, f_1 \circ f_2)$ es de nuevo un cubrimiento, que diremos más fuerte, de $\mathcal{S}$ obsérvese que si dos cubrimientos son mutuamente uno más fuerte que el otro, entonces son conformemente equivalentes y pueden considerarse esencialmente el mismo.

Se puede demostrar (ver [A]) que existe un cubrimiento de $\mathcal{S}$ que es el más fuerte de todos. Tal cubrimiento $(\widetilde{\mathcal{S}}, \pi)$ se llama cubrimiento universal de $\mathcal{S}$ y tiene la propiedad de que su grupo fundamental $\Pi_1(\widetilde{\mathcal{S}}, \widetilde{p_o})$ con punto base $\widetilde{p_o} \in \widetilde{\mathcal{S}}$, es trivial. En otras palabras,$\mathcal{S}$ es una superficie simplemente conexa.

Si S es una superficie de Riemann y $\pi : \widetilde{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$ es su cubrimiento universal, llamamos grupo de cubrimiento Γ de S (asociado a π) al grupo de transformaciones biholomorfas $\gamma : \widetilde{\mathcal{S}} \to \widetilde{\mathcal{S}}$ tales que $\pi \circ \gamma = \pi$ (lo que equivale a decir que p y $\gamma(p)$ tienen la misma proyección). Un hecho realmente sorprendente es que Γ es isomorfo al grupo fundamental $\Pi_1(\mathcal{S}, p_0)$ (ver [A]).

El grupo Γ actúa discontinuamente y sin puntos fijos y $\mathcal{S}$ es conformemente equivalente $\widetilde{\mathcal{S}}/\Gamma$. En sentido recíproco, dado cualquier grupo Γ de transformaciones biholomorfas $\gamma : \widetilde{\mathcal{S}} \to \widetilde{\mathcal{S}}$ que actúe discontinuamente y sin puntos fijos, $\widetilde{\mathcal{S}}/\Gamma$ es una superficie de Riemann y $\pi : \widetilde{\mathcal{S}} \to \widetilde{\mathcal{S}}/\Gamma$ es su recubrimiento universal. Un tal grupo Γ se llama un grupo Fuchsiano si $\widetilde{\mathcal{S}} = \triangle$.

Dada una superficie de Riemann $\mathcal{S}$, su recubrimiento universal $\widetilde{\mathcal{S}}$ ha de ser una superficie simplemente conexa. El Teorema de uniformización nos dice que existen muy pocas superficies simplemente conexas.

Teorema 7. *(Teorema de Uniformización)*
Toda superficie de Riemann simplemente conexa $\widetilde{S}$ es conformemente equivalente al disco unidad $\triangle$ del plano complejo, al propio plano complejo $\mathbb{C}$, o a la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$.

Por tanto $\widetilde{\mathcal{S}}$ tiene que ser una de estas tres superficie: $\triangle$, $\mathbb{C}$ o $\widehat{\mathbb{C}}$.

Si $\widetilde{\mathcal{S}} = \widehat{\mathbb{C}}$ entonces $\mathcal{S}$ es necesariamente $\widehat{\mathbb{C}}$, ya que $\widehat{\mathbb{C}}$ sólo puede ser espacio recubridor de sí mismo (El grupo del cubrimiento es trivial, es la única acción sin puntos fijos).

Si $\widetilde{\mathcal{S}} = \mathbb{C}$, el grupo de cubrimiento ha de estar formado necesariamente por transformaciones del tipo $\gamma(z) = z + a$ para que no haya puntos fijos en $\mathbb{C}$. Como además, el grupo debe actuar discontinuamente, Γ ha de ser o bien el grupo trivial o bien debe tener uno o dos generadores. Por tanto $\mathcal{S}$ tiene que ser conformemente equivalente a $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, o a un toro, respectivamente (hay toda una variedad unidimensional de toros no conformemente equivalentes entre sí). Nótese a modo de ilustración que en el caso $\mathcal{S} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ podemos tomar como aplicación recubridora la función exponencial.

Por último, todas aquellas superficies $\mathcal{S}$ que tienen como recubridor universal al disco $\triangle$ se llaman *superficies hiperbólicas*. Todas las demás (que como hemos visto son muy pocas) se llaman *superficies excepcionales.*

Es conveniente señalar que esta definición de superficie de Riemann hiperbólica no es aceptada universalmente, ya que a veces la palabra hiperbólica se refiere a la existencia de función de Green. Hay que señalar también que en general es muy difícil calcular explícitamente la aplicación recubridora; de hecho, esto sólo se puede hacer en casos muy particulares.

Vamos a ver ahora cómo el disco unidad $\triangle$ va a inducir una métrica (la métrica hiperbólica) en la superficie $\mathcal{S}$.

Dada cualquier superficie de Riemann hiperbólica $\mathcal{S}$, si $\pi : \triangle \to \mathcal{S}$ es su recubrimiento universal,y dada $T \in Aut(\triangle)$, entonces $\pi o T : \triangle \to \triangle$ es también un recubrimiento universal y de hecho estos son todos los posibles. Por tanto, al elegir un cubrimiento universal podernos prefijar $\pi(0)$.

Obsérvese ahora que el grupo de cubrimiento Γ asociado a $\pi : \triangle \to \mathcal{S}$ es un subgrupo de $Aut(\triangle)$ y como $\mathcal{S}$ es conformemente equivalente a $\triangle/\Gamma$, los grupos Fuchsianos Γ que podernos elegir son únicos salvo conjugación por un elemento de $Aut(\triangle)$. En otras palabras, existe una biyección entre el conjunto de superficies de Riemann (salvo equivalencia conforme) y el conjunto de subgrupos Fuchsianos de $Aut(\triangle)$ (salvo conjugación). Por otro lado, como Γ es un grupo de isometrías en la métrica de Poincaré de $\triangle$, puede proyectarse dicha métrica mediante π obteniéndose una métrica Riemanniana conforme, completa y con curvatura $K = -1$ en $\mathcal{S} = \triangle/\Gamma$, la métrica hiperbólica o de Poincaré. Siempre que no se diga expresamente lo contrario, toda superficie de Riemann hiperbólica se considera con la métrica de Poincaré.

Una superficie de Riemann hiperbólica dotada de su métrica hiperbólica es un espacio métrico completo cuya topología coincide con la de la superficie original. Además, dados dos puntos distintos, siempre existe una geodésica que los une. Con la métrica hiperbólica, las aplicaciones conformes son isometrías.

Teorema 8. *Sea $\mathcal{S}$ una superficie de Riemann arbitraria. Podemos introducir en $\mathcal{S}$ una métrica Riemanniana completa de curvatura constante: la curvatura es positiva para $\mathcal{S} = \widetilde{\mathbb{C}}$, cero si $\mathbb{C}$ es el cubrimiento universal de $\mathcal{S}$ y negativa en otro caso.*

Demostración. Sea $\widetilde{S}$ el cubrimiento universal de $\mathcal{S}$ y sea G el correspondiente grupo de transformaciones de cubrimiento. sabemos que G es un grupo de isometrías en la métrica de curvatura constante que hemos introducido.Dado que la métrica es invariante bajo G, se proyecta a una métrica en $\mathcal{S}$ y dado que la curvatura es definida localmente, está es de nuevo constante en $\mathcal{S}$. (se puede probar que la curvatura está bien definida en $\mathcal{S}$, esto es, que se transforma correctamente bajo cambio de coordenadas.) La métrica Riemanniana en $\mathcal{S}$ (denotada en términos de la coordenada local z por $\lambda(z)|dz|$) nos permite definir longitud de curvas en $\mathcal{S}$ por la fórmula (4) y por tanto una función distancia d por (6). Sea

$$\pi : \widetilde{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$$

la holomorfa proyección canónica. Sean x, $y \in \mathcal{S}$, afirmamos que:

$$d(x, y) = \inf\{d(\xi, \eta) : \pi(\xi) = x, \pi(\eta) = y\}. \tag{7}$$

Note que debemos probar que en $\widetilde{\mathcal{S}}$ el ínfimo en (6) es siempre alcanzado por alguna curva c. Sea d el ínfimo de (7). Sea c la curva que une en $\widetilde{\mathcal{S}}$ a $\pi(\xi) = x$, $\pi(\eta) = y$. Entonces $\pi \circ c$ es una curva en $\mathcal{S}$ que une x con y. Claramente, $l(\pi \circ c) = l(c)$. Así.

$$d(x, y) \leq l(\pi \circ c) = l(c),$$

y dado que c es arbitrario,

$$d(x, y) \leq d(\xi, \eta)$$

Finalmente, dado que ξ, η son arbitrarias en la preimagen de x, y,

$$d(x, y) \leq d.$$

Se sigue que si c es una curva en m uniendo a x con y, esta puede ser levantada a una curva $\widetilde{c}$ uniendo ξ con η ($\pi(\xi) = x$, $\pi(\eta) = y$) de la misma longitud, puesto que π es localmente una isometría. Así,

$$l(c) = l(\overline{c}) \geq d(\xi, \eta) \geq d.$$

Dado que c es arbitraria, se concluye que

$$d(x, y) \geq d.$$

de aquí se deduce que la métrica es completa.

Observación 9.

1. *Si una superficie de Riemann tiene una métrica Riemanniana, entonces la métrica puede ser usada para definir un elemento de área dA y una curvatura K. La fórmula de Gauss-Bonnet dice*
$$\int\int_M KdA = 2\pi(2-2g),$$
si $\mathcal{S}$ es una superficie compacta de género g. Así, en particular, el signo de la métrica de curvatura constante es únicamente determinado por la topología de la superficie.

2. *Sea $\mathcal{S}$ una superficie de Riemann arbitraria con espacio de cubrimiento universal holomorfo $\widetilde{\mathcal{S}}$. En $\widetilde{\mathcal{S}}$*
$$\lambda(z)^2 dz\wedge d\overline{z}$$
es una 2-forma en ninguna parte vacía, invariante bajo el grupo de cubrimiento de $\widetilde{\mathcal{S}}\to\mathcal{S}$. Así la proyección de una una 2-forma suave en ninguna parte vacía de $\mathcal{S}$.

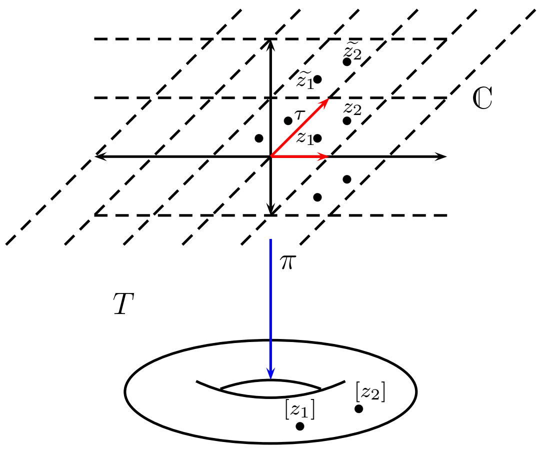
$\blacksquare$

Ejemplo 10. *Consideremos el toro complejo $T = C/L_\tau$, donde $L_\tau = \{n+m\tau : n, m\in\mathbb{Z}\}$ con τ un número complejo tal que $\Im(\tau) > 0$, entonces $\mathbb{C}$ es su cubrimiento universal y tenemos:*

$$\begin{aligned}\pi :&\mathbb{C}\to\mathbb{C}/L_\tau\\ &z\mapsto [z] = z + L_\tau\end{aligned}$$

Entonces, dados $[z_1], [z_2]\in T$,

$$d([z_1],[z_2]) = \text{ínf}\{d(\xi,\eta) : \pi(\xi) = x, \pi(\eta) = y\}.$$



En este caso, es claro que si $a\in[z_1]$ y $b\in[z_2]$, entonces $|a-b| = |z_1-z_2|$, luego:

$$d([z_1],[z_2]) = |z_1 - z_2|.$$

Bibliografía

[A] Ahlfors, L .V.: Conformal invariants, McGraw-Hill, 1973.

[F] Farkas, H. and Kra, I.: Riemann Surfaces, Graduate Text in Mathemathics, V.72, Springer 1996.

[J] Jones G.A and Singerman D.: Complex Functions: an algebraic and geometric viewpoint, Cambridge University Press, 1987.

[K] Krantz, S. G.: Geometric Function Theory, Explorations in Complex Analysis, Birkhäuser Boston, 2006.