

# Una breve introducción a las superficies de género 1

Robert Auffarth

Sean  $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$  linealmente independientes como vectores sobre  $\mathbb{R}$ . Sea  $L = \langle w_1, w_2 \rangle$  el subgrupo generado por ellos. Tomamos el grupo cociente  $X = \mathbb{C}/L$  con la topología cociente inducida por  $\mathbb{C}$  y la proyección natural  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow X$ . Se puede ver que localmente  $\pi$  es un homeomorfismo, y localmente  $\pi^{-1}$  se puede tomar como una carta local, para así darle a  $\mathbb{C}/L$  una estructura de superficie de Riemann. Esta superficie se llama *toro complejo*.

Notamos que un toro complejo es homeomorfo a  $S^1 \times S^1$ , y luego tiene género 1.

En estos apuntes estudiaremos algunas propiedades básicas de los toros complejos, y mostraremos que todo toro complejo es isomorfo a una curva elíptica.

## 1. Toros complejos y sus automorfismos

Sean  $L, M \subset \mathbb{C}$  lattices en  $\mathbb{C}$ , y para  $a \in \mathbb{C}$  consideremos la función  $T_a : z \mapsto z + a$ . Esta función induce una función holomorfa de  $\mathbb{C}/L$  en  $\mathbb{C}/L$  definida por  $z + L \mapsto z + a + L$ ; es una función holomorfa biyectiva, y luego  $T_a \in \text{Aut}(\mathbb{C}/L)$ .

Sean ahora  $X = \mathbb{C}/L$ ,  $Y = \mathbb{C}/M$  y  $f : X \rightarrow Y$  holomorfa. Si componemos  $f$  con una traslación en  $Y$ , podemos suponer que  $f(0 + L) = 0 + M$ . Por la fórmula de Riemann-Hurwitz, tenemos que

$$\sum_{p \in X} (\text{mult}_p f - 1) = 0,$$

y luego  $f$  es no ramificada. Esto implica que  $f$  es un cubrimiento en el sentido topológico, y entonces también lo es la composición  $f \circ \pi$  (notamos que  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow X$  es el cubrimiento universal de  $X$ ). Entonces, por la propiedad universal del cubrimiento universal, existe un homeomorfismo  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\ \pi \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Es fácil ver que  $g$  es holomorfa (de hecho es una función entera). Notamos además que para todo  $z \in \mathbb{C}$  y para todo  $l \in L$ , tenemos que

$$\pi(g(z + l)) = f(z + l + L) = f(z + L) = \pi(g(z)),$$

y entonces  $g(z + l) - g(z) \in M$  para todo  $l \in L$ . Así podemos suponer que  $g(0) = 0$ ; si no, trasladamos la imagen de  $g$  por  $-g(0) \in M$ . Este cambio claramente no afecta el diagrama.

Entonces para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,  $l \in L$ , existe un  $\omega(z, l) \in M$  tal que  $\omega(z, l) = g(z + l) - g(z)$ . Como  $\mathbb{C}$  es conexo y  $g(z + l) - g(z)$  es localmente constante (para  $l$  fijo), entonces  $\omega(z, l)$  no depende de  $z$ . Si derivamos esta expresión con respecto a  $z$ , obtenemos que  $g'(z + l) = g'(z)$  para todo  $z$ , y para todo  $l \in L$ . Esto implica que los valores que toma  $g'$  están dentro de un compacto, y por el Teorema de Liouville, necesariamente  $g'$  es constante. Por lo tanto,  $g$  es lineal, y entonces existe  $\gamma \in \mathbb{C}$  tal que  $g(z) = \gamma z$  (recordemos que  $g(0) = 0$ ). Notamos además que  $\gamma L \subset M$ . Tenemos entonces la siguiente proposición:

**Proposición 1.1** *Toda función holomorfa  $f : X \rightarrow Y$  está inducida por una función polinomial de grado uno  $g(z) = \gamma z + a$ , donde  $\gamma$  es tal que  $\gamma L \subset M$ . Podemos suponer que  $a = 0$  si y solamente si  $f(0 + L) = 0 + M$ , y en este caso tenemos que  $f$  es un homomorfismo de grupos. Tenemos además que  $\deg f = [M : \gamma L]$ , y en particular  $f$  es un isomorfismo si y solamente si  $\gamma L = M$ .*

Tomemos ahora  $f \in \text{Aut}(X)$  con  $f(0 + L) = 0 + L$ . Entonces  $f(z + L) = \gamma z + L$  para algún  $\gamma \in \mathbb{C}$  tal que  $\gamma L = L$ . Se ve que  $\gamma$  necesariamente es de módulo 1, y de hecho es una raíz de la unidad. Notamos que dos posibilidades para  $\gamma$  son  $\pm 1$ ; de hecho todo toro complejo posee estos dos automorfismos.

Supongamos que  $\gamma$  no es real, y sea  $l \in L \setminus \{0\}$  de longitud minimal. Entonces  $\langle l, \gamma l \rangle = L$ . Tenemos que  $\gamma^2 l = a\gamma l + bl$  para algunos  $a, b \in \mathbb{Z}$ , y simplificando, tenemos que  $\gamma^2 - a\gamma - b = 0$ . Las únicas raíces de la unidad que satisfacen alguna ecuación cuadrática son las raíces cuartas y las raíces sextas, y entonces podemos suponer que o bien  $\gamma = e^{i\pi/3}$  o  $\gamma = i$  (si  $\gamma = e^{2i\pi/3}$ , entonces se puede demostrar que necesariamente el elemento  $e^{i\pi/3}l$  también está en  $L$ ).

En el primer caso, decimos que  $L$  es un lattice hexagonal; en el segundo caso decimos que  $L$  es un lattice cuadrado.

Sea ahora  $\text{Aut}_0(X) := \{f \in \text{Aut}(X) \mid f(0 + L) = 0 + L\}$ . Entonces

- (a) Si  $L$  es hexagonal, tenemos que  $\text{Aut}_0(X) \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ .
- (b) Si  $L$  es cuadrado, tenemos que  $\text{Aut}_0(X) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ .
- (c) Si  $L$  no es ni cuadrado ni hexagonal, tenemos que  $\text{Aut}_0(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Si denotamos por  $T(X) := \{f \mid f \text{ es traslación de } X\}$ , entonces notamos que  $T(X) \trianglelefteq \text{Aut}(X)$ . Además,  $T(X) \cap \text{Aut}_0(X) = \{\text{id}\}$  y  $T(X)\text{Aut}_0(X) = \text{Aut}(X)$ , de donde obtenemos que  $\text{Aut}(X) \cong T(X) \rtimes \text{Aut}_0(X) \cong X \rtimes \text{Aut}_0(X)$ .

## 2. Clases de isomorfismo de toros complejos

Se tiene que todo toro complejo es isomorfo a un toro inducido por algún lattice  $\langle 1, \tau \rangle$ , para  $\tau$  en el semiplano superior  $\mathbb{H}$ ; llamemos  $X_\tau$  a tal toro. Queremos ver precisamente cuándo dos toros  $X_\tau$  y  $X_\sigma$  son isomorfos.

Vimos en la sección anterior que  $X_\tau \cong X_\sigma$  si y solamente si existe un  $\gamma \in \mathbb{C}$  tal que  $\gamma\langle 1, \tau \rangle = \langle 1, \sigma \rangle$ . Si esto ocurre, entonces existen  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  tales que  $\gamma = c\sigma + d$  y  $\gamma\tau = a\sigma + b$ . Entonces

$$\begin{pmatrix} \gamma\tau \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que como  $\gamma\langle 1, \tau \rangle = \langle 1, \sigma \rangle$ , entonces tenemos que poder escribir 1 y  $\sigma$  como combinación lineal de  $\gamma$  y  $\gamma\tau$  con coeficientes enteros. En tal caso, los coeficientes serían únicos, ya que  $\gamma$  y  $\gamma\tau$  forman una base para  $\mathbb{C}$  sobre  $\mathbb{R}$ . Vemos que

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma\tau \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \\ 1 \end{pmatrix},$$

y como los coeficientes son únicos y pertenecen a  $\mathbb{Z}$ , necesariamente  $ad - bc \in \{\pm 1\}$ . Como  $\tau$  y  $\sigma$  están en el semiplano superior, entonces necesariamente  $ad - bc = 1$ , y luego la matriz arriba pertenece a  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ .

Está claro que estas condiciones son suficientes también (si  $\tau = (a\sigma + b)/(c\sigma + d)$  con  $ad - bc = 1$ , entonces definimos  $\gamma := c\sigma + d$ , y se tiene lo buscado), y entonces tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 2.1** *Dos toros complejos  $X_\tau$  y  $X_\sigma$  son isomorfos si y solamente si existe  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$  tal que*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \sigma = \tau,$$

donde la acción de  $SL_2(\mathbb{Z})$  sobre  $\mathbb{H}$  es la natural:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \sigma := \frac{a\sigma + b}{c\sigma + d}.$$

Esta no es una acción fiel (efectiva), pues el núcleo de esta acción corresponde al subgrupo  $\{\pm \text{id}\} \trianglelefteq SL_2(\mathbb{Z})$ . Por lo tanto, consideraremos que el grupo que actúa sobre  $\mathbb{H}$  es realmente  $SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm \text{id}\} = PSL_2(\mathbb{Z})$ . En conclusión, hay una correspondencia 1 – 1 entre las clases de isomorfismo de los toros complejos y el espacio  $\mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$ .

### 3. Dominios fundamentales en un toro complejo

Sea  $L \subset \mathbb{C}$  un lattice en  $\mathbb{C}$ ,  $X = \mathbb{C}/L$  el toro asociado a  $L$ , y sea  $G = \text{Aut}_0(X)$  como antes. Observamos primero que si  $T_a$  es una traslación en  $X$  ( $z + L \mapsto z + a + L$ ) de orden finito, entonces la función  $\pi_a : X \rightarrow X/\langle T_a \rangle$  (la proyección a la superficie cociente) es no ramificada, y por la fórmula de Riemann-Hurwitz se tiene que

$$0 = \deg \pi_a(2g - 2),$$

donde  $g$  es el género de  $X/\langle T_a \rangle$ . Notamos entonces que necesariamente  $g = 1$ , y luego el cociente es homeomorfo a un toro.

Observamos que cuando estudiamos el subgrupo  $G$ , sin embargo, es distinto. Por la fórmula de Riemann-Hurwitz tenemos que

$$0 = \deg \pi(2g - 2) + \sum_{p \in X} (\text{mult}_p \pi_G - 1),$$

donde  $\pi_G : X \rightarrow X/G$  es la proyección natural y  $g$  es el género de la superficie cociente. De otra forma, tenemos que

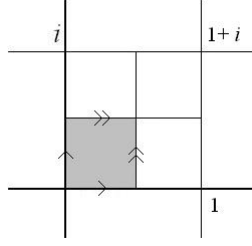
$$(2 - 2g) \deg \pi_G = \sum_{p \in X} (\text{mult}_p \pi_G - 1).$$

Observamos que para todo lattice  $L$ ,  $0 + L$  siempre es un punto de ramificación de  $\pi_G$  (pues  $0 + L$  es un punto fijo de todo automorfismo de  $G$ , y los otros puntos cerca de 0 son “rotados”). Por lo tanto,  $g \neq 1$ . Además,  $g < 1$ , ya que si no, entonces el lado derecho de la igualdad sería negativo. Por lo tanto,  $g = 0$ , y entonces  $X/G$  es homeomorfo a una esfera.

Nos concentraremos ahora en los automorfismos  $G$  y en los distintos tipos de lattice mencionados arriba; nuestro análisis se hará por casos:

1.  $L$  es un lattice cuadrado.

En este caso, tenemos que  $G = \langle h \rangle \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ , donde  $h(z + L) = iz + L$ . Notamos que  $X$  es isomorfo al toro  $\mathbb{C}/\langle 1, i \rangle$ , y en tal toro tenemos que un dominio fundamental para la acción de  $G$  es de la forma  $\{s + ti + \langle 1, i \rangle : s, t \in [0, 1/2]\}$ :



En este caso,

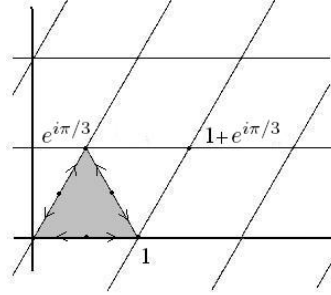
$$\text{mult}_{0+L}\pi_G = \text{mult}_{\frac{i+1}{2}+L}\pi_G = 4$$

$$\text{mult}_{\frac{1}{2}+L}\pi_G = \text{mult}_{\frac{i}{2}+L}\pi_G = 2$$

y  $\text{mult}_p\pi_G = 1$  para todo  $p$  distinto a estos puntos. Notamos que esta acción induce una función holomorfa  $\pi_G : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  de grado 4.

2.  $L$  es hexagonal.

Tenemos que  $G = \langle h \rangle \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ , donde  $h(z + L) = e^{\pi i/3}z + L$ . Vemos que  $X$  es isomorfo al toro inducido por el lattice  $\langle e^{\pi i/3}, 1 \rangle$ , y un dominio fundamental para la acción de  $G$  es  $\{te^{\pi i/3} + s : s, t \in [0, 1], s + t \leq 1\}$ :



Aquí tenemos que

$$\text{mult}_{0+L}\pi_G = 6$$

$$\text{mult}_{\frac{1}{2}+L}\pi_G = \text{mult}_{\frac{e^{\pi i/3}}{2}+L}\pi_G = \text{mult}_{\frac{1+e^{\pi i/3}}{2}+L}\pi_G = 2$$

$$\text{mult}_{(2-\sqrt{3})(1+e^{\pi i/3})+L}\pi_G = \text{mult}_{(2-2\sqrt{3})(1+e^{\pi i/3})+L} = 3$$

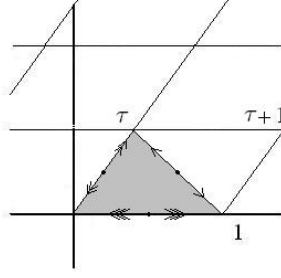
y  $\text{mult}_p\pi_G = 1$  para todo otro  $p \in X$ . En este caso, notamos que tenemos entonces una función holomorfa  $\pi_G : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  de grado 6.

Podemos ver que si dejamos que el subgrupo  $H = \langle h^2 \rangle$  actúe sobre  $X$ , entonces la superficie cuociente también da la esfera, y

$$\text{mult}_{0+L}\pi_H = \text{mult}_{(2-\sqrt{3})(1+e^{\pi i/3})+L}\pi_H = \text{mult}_{(2-2\sqrt{3})(1+e^{\pi i/3})+L}\pi_H = 3$$

y  $\text{mult}_p\pi_H = 1$  para todo otro punto  $p \in X$ .

3. Si  $L$  no es ni cuadrado ni hexagonal, entonces solamente tenemos el automorfismo  $z + L \mapsto -z + L$  (todo toro complejo tiene este automorfismo). En este caso, si  $L = \langle 1, \tau \rangle$ , un dominio fundamental para la acción de  $G$  sobre  $\mathbb{C}/L$  es  $\{s + t\tau : s, t \in [0, 1], s + t \leq 1\}$ :



En tal caso,

$$\text{mult}_{0+L}\pi_G = \text{mult}_{\frac{1}{2}+L}\pi_G = \text{mult}_{\frac{\tau}{2}+L}\pi_G = \text{mult}_{\frac{1+\tau}{2}+L}\pi_G = 2;$$

así, tenemos una función holomorfa  $\pi_G : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  de grado 2. Notamos que todo toro complejo posee esta función.

#### 4. La función $\wp$ de Weierstrass y las curvas elípticas

Sea  $L \subset \mathbb{C}$  un lattice en  $\mathbb{C}$ . Definimos la función  $\wp$  de Weierstrass (que dependerá de  $L$ ) como la función

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in L \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right).$$

Tenemos que  $\wp$  es una función meromorfa par en  $\mathbb{C}$  con polos dobles en todo punto de  $L$ . Notamos que

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} - \sum_{w \in L \setminus \{0\}} \frac{2}{(z-w)^3},$$

y es fácil ver que  $\wp'$  es una función meromorfa  $L$ -periódica. Tomando derivada entonces, notamos que para todo  $w \in L$ ,  $\wp(z+w) - \wp(z)$  es constante, y reemplazando  $z = -w/2$ , obtenemos que  $\wp(z+w) - \wp(z) = 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ ; por lo tanto,  $\wp$  también es  $L$ -periódica. Esto implica que  $\wp$  y  $\wp'$  son funciones meromorfas del toro complejo  $\mathbb{C}/L$ , y de hecho se puede demostrar que  $\mathcal{K}(\mathbb{C}/L) = \mathbb{C}(\wp, \wp')$  (donde  $\mathcal{K}(\mathbb{C}/L)$  es el cuerpo de las funciones meromorfas en  $\mathbb{C}/L$ ).

Como  $\wp$  tiene un polo de orden 2 en todo elemento de  $L$ , entonces  $\deg \wp = 2$  (cuando vemos a  $\wp$  como una función holomorfa  $\mathbb{C}/L \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ ).

Sea ahora  $G_k(L) := \sum_{w \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{w^k}$  para  $k \geq 2$  (estas series se llaman series de Eisenstein, y cuando no hay confusión, las denotaremos simplemente por  $G_k$ ). Se puede demostrar que la serie de Laurent de  $\wp$  en 0 es  $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n \in 2\mathbb{Z}_+} (n+1)G_{n+2}z^n$  para  $|z| < \inf\{|w| : w \in L \setminus \{0\}\}$ . Tenemos que en 0,

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \mathcal{O}(z^6)$$

y

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6G_4z + 20G_6z^3 + \mathcal{O}(z^5).$$

Se tiene que  $(\wp'(z))^2$  y  $4(\wp(z))^3 - 60G_4\wp(z) - 140G_6$  son de la forma

$$\frac{4}{z^6} - \frac{24G_4}{z^2} - 80G_6 + \mathcal{O}(z^2),$$

y luego su diferencia es una constante; esta constante además debe ser 0. Por lo tanto, tenemos que

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z))^3 - 60G_4\wp(z) - 140G_6.$$

Esto significa que  $(\wp(z), \wp'(z))$  satisface la ecuación  $y^2 = 4x^3 - ax - b$ , con  $a = 60G_4$  y  $b = 140G_6$ . Notamos que esta ecuación es no singular si y solamente si el polinomio  $p(x) = 4x^3 - ax - b$  tiene 3 raíces distintas.

**Proposición 4.1** *El polinomio  $p(x) = 4x^3 - ax - b$  tiene 3 raíces distintas.*

**Demostración** Vemos que si  $z_0 + L = -z_0 + L$  (y  $z_0 \notin L$ ), entonces  $\wp'(z_0) = \wp'(-z_0) = -\wp'(z_0)$ , y luego  $\wp'(z_0) = 0$ ; esto implica que en tal caso,  $\wp(z_0)$  es raíz del polinomio  $p(x)$ . Supongamos que  $L = \langle w_1, w_2 \rangle$ ; entonces notamos que  $z_1 = w_1/2, z_2 = w_2/2$  y  $z_3 = (w_1 + w_2)/2$  son puntos de  $\mathbb{C}$  que cumplen tal igualdad. Además, como  $\wp'(z_i) = 0$  para  $i = 1, 2, 3$ , entonces  $\wp$  tiene multiplicidad 2 en cada  $z_i$ ; esto muestra que necesariamente  $\wp(z_i) \neq \wp(z_j)$  para todo  $i \neq j$  (ya que  $\wp$  es de grado 2), y luego las raíces de  $p(x)$  son todas distintas. □

Esto implica que la ecuación  $y^2 = 4x^3 - ax - b$  es no singular, y por lo tanto el conjunto  $\tilde{X} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = p(x)\}$  es una superficie de Riemann.

Si agregamos “un punto en infinito” a  $\tilde{X}$ , obtenemos una superficie de Riemann compacta  $X$ . Mejor dicho, sea  $X$  la superficie de Riemann hiperelíptica dada por la ecuación  $y^2 = p(x)$ . Consideremos además la función  $\phi : \mathbb{C}/L \rightarrow X$  tal que  $z + L \mapsto (\wp(z + L), \wp'(z + L))$ . Vemos que  $\phi$  está bien definida.

Sea  $(x, y) \in X \setminus \{\infty\}$  tal que  $y \neq 0$ . Entonces tenemos que existe una vecindad de  $x$  en  $\mathbb{C}$  tal que  $y = y(x)$  es una función holomorfa de  $x$  en tal vecindad con  $(x, y(x)) \in X$  (Teorema de la Función Implícita), y luego  $(x, y) \mapsto x$  es una carta local de  $X$ . Notamos que con esta carta,  $\phi$  es holomorfa fuera de 0 y donde  $\wp'(z) \neq 0$  (pues  $z \mapsto z + L \mapsto (\wp(z), \wp'(z)) \mapsto \wp(z)$  es holomorfa). Si  $\wp'(z + L) = 0$ , entonces tenemos la carta  $(x, y) \mapsto y$ ; con esta carta tenemos que  $\phi$  en coordenadas locales es de la forma  $z \mapsto \wp'(z)$ , y esta función es holomorfa. Esto muestra que  $\phi$  es holomorfa en  $(\mathbb{C}/L) \setminus \{0 + L\}$ .

Cerca de  $0 + L$ ,  $\wp(z + L)$  es “grande”, y vemos que una carta local definida alrededor de  $\infty \in X$  es  $(x, y) \mapsto y/x^2$ . Con estas coordenadas, tenemos que  $\phi$  es localmente de la forma  $z \mapsto \wp'(z)/(\wp(z))^2$ , y es fácil ver que esta función es holomorfa en 0. Por lo tanto,  $\phi$  es holomorfa.

Como  $\phi$  es una función holomorfa entre superficies de Riemann compactas, entonces es sobreyectiva. Además, por la fórmula de Riemann-Hurwitz, se tiene que  $\phi$  es no ramificada. Notamos que si  $z + L \in \mathbb{C}/L$ , entonces  $\wp(z + L) = \wp(-z + L)$  y  $\wp'(-z + L) = -\wp'(z + L)$ ; esto muestra que como  $\wp$  es de grado 2, entonces necesariamente tiene que ser inyectiva.

Concluimos entonces que  $\phi$  es un isomorfismo entre  $\mathbb{C}/L$  y  $X$ , y por lo tanto todo toro complejo puede verse como una curva elíptica.

Es interesante notar que como todo toro  $\mathbb{C}/L$  tiene el automorfismo  $z + L \mapsto -z + L$ , podemos ver este automorfismo como un automorfismo de la curva elíptica asociada  $X$ :  $(\wp(z), \wp'(z)) \mapsto (\wp(-z), \wp'(-z)) = (\wp(z), -\wp'(z))$ . En otras palabras, corresponde al automorfismo  $(x, y) \mapsto (x, -y)$ .

De hecho, sabemos que si  $\mathbb{C}/L$  y  $\mathbb{C}/M$  son dos toros complejos isomorfos, entonces los isomorfismos entre ellos que fijan el 0 son de la forma  $f : \mathbb{C}/L \rightarrow \mathbb{C}/M$  donde  $z + L \mapsto \gamma z + M$ , con  $\gamma L = M$ . Como  $\wp_M(\gamma z) = \gamma^{-2}\wp_L(z)$  y  $\wp'_M(\gamma z) = \gamma^{-3}\wp'_L(z)$  (donde  $\wp_L$  es la función de Weierstrass que corresponde al lattice  $L$ , claramente), entonces obtenemos que el isomorfismo correspondiente entre sus curvas elípticas es  $(x, y) \mapsto (\gamma^{-2}x, \gamma^{-3}y)$ .

Hemos probado entonces la siguiente proposición:

**Proposición 4.2** *Dado un toro complejo  $\mathbb{C}/L$  para algún lattice  $L$ , entonces  $\mathbb{C}/L$  es isomorfo (como superficie de Riemann) a una curva elíptica dada por  $y^2 = 4x^3 - ax - b$ , donde  $a = 60 \sum_{w \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{w^4}$  y  $b = 140 \sum_{w \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{w^6}$ .*

Recíprocamente, dada una curva elíptica  $y^2 = p(x)$  (no singular, con  $\deg p(x) = 3$ ), sabemos que esta superficie tiene género 1; ¿Es posible determinar si tal superficie proviene de un toro complejo, y si es así, cuál es lattice que lo determina?

Sea  $j : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $j(\tau) = 1728 \frac{(60G_4(\tau))^3}{(60G_4(\tau))^3 - 27(140G_6(\tau))^2}$ , donde  $G_k(\tau)$  es la serie de Eisenstein que corresponde al lattice  $L = \langle 1, \tau \rangle$ . Notamos que el denominador de  $j$  no se anula, pues éste corresponde a un múltiplo del discriminante del polinomio  $p(x)$  definido por  $L$ , y como  $p(x)$  tiene raíces distintas, entonces su discriminante es no nulo. Se puede demostrar además que  $j$  es sobreyectiva.

Sea  $y^2 = 4x^3 - a_2x - a_3$  una curva elíptica no singular con  $a_2, a_3 \neq 0$  ( $p(x)$  no tendría por qué tener esa forma, sin embargo, se puede obtener esta forma a través de un cambio de variables); entonces existe  $\tau \in \mathbb{H}$  tal que

$$\frac{(60G_4(\tau))^3}{(60G_4(\tau))^3 - 27(140G_6(\tau))^2} = \frac{a_2^3}{a_2^3 - 27a_3^2}.$$

Entonces

$$\frac{a_2^3}{(60G_4(\tau))^3} = \frac{a_3^2}{(140G_6(\tau))^2}.$$

Sean  $w_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $w_2 = \tau w_1$  y  $L = \langle w_1, w_2 \rangle$ . Entonces se puede ver que  $G_4(L) = w_2^{-4} G_4(\tau)$  y  $G_6(L) = w_2^{-6} G_6(\tau)$ . Luego, debemos elegir  $w_2$  de tal manera que  $w_2^{-4} = a_2/(60G_4(\tau))$  y  $w_2^{-6} = a_3/(140G_6(\tau))$ . Sin embargo, si satisfacemos la primera condición, entonces por la igualdad  $\frac{a_2^3}{(60G_4(\tau))^3} = \frac{a_3^2}{(140G_6(\tau))^2}$ , obtenemos que  $w_2^{-6} = \pm a_3/(140G_6(\tau))$ . Si el signo no coincide, entonces reemplazamos  $w_2$  por  $iw_2$ . Por lo tanto, encontramos un lattice  $L = \langle w_1, w_2 \rangle$  tal que la curva elíptica generada por  $L$  es precisamente la curva elíptica dada por  $y^2 = 4x^3 - a_2x - a_3$ . En resumen:

**Proposición 4.3** *Dada una curva elíptica (no singular), entonces existe un lattice en  $\mathbb{C}$  de tal manera que  $\mathbb{C}/L$  es isomorfo a la curva elíptica. Además, tal isomorfismo es el isomorfismo descrito antes usando la función  $\wp$  de Weierstrass.*

Si  $a_2 = 0$  podemos ver que el lattice buscado es de la forma  $\gamma \langle 1, \zeta \rangle$  donde  $\gamma \in \mathbb{C}$  y  $\zeta$  es una raíz cúbica de la unidad. Si  $a_3 = 0$ , entonces el lattice buscado es de la forma  $\gamma \langle 1, i \rangle$  para algún  $\gamma \in \mathbb{C}$ . Notamos que estos dos casos corresponden a los dos casos excepcionales en cuanto a los automorfismos.

## 5. $X$ como grupo abeliano

Sea  $L \subset \mathbb{C}$  un lattice y  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  meromorfa de periodo  $L$ . Sea  $P$  un paralelogramo fundamental de  $L$  (si  $L = \langle w_1, w_2 \rangle$ , digamos que es el paralelogramo generado por  $w_1$  y  $w_2$ ), y sea  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que la traslación  $z_0 + \partial P$  no contiene ni ceros ni polos de  $f$ . Calculando, obtenemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{z_0 + \partial P} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = \frac{w_1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \frac{w_2}{2\pi i} \int_{\eta} \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

donde  $\gamma(t) = z_0 + tw_2$  y  $\eta(t) = z_0 + tw_1$  para  $t \in [0, 1]$ . Notamos que podemos subdividir  $\gamma$  (y análogamente  $\eta$ ) en curvas  $\gamma_i$  sobre intervalos  $[a_i, a_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tales que  $f \circ \gamma_i$  posee logaritmo (digamos  $\log_i$ , para mostrar que posiblemente tienen distintas ramas) para todo  $i \leq n$ . De este modo,

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^n [\log_i(f(\gamma(a_{i+1}))) - \log_i(f(\gamma(a_i)))]$$

Notamos que esta suma es casi telescópica; sin embargo, no se anulan los elementos necesariamente, pues  $\log_{i+1} - \log_i$  no es necesariamente la función 0. Sin embargo, estas funciones sí difieren por una constante (sus derivadas son iguales), y esta constante de hecho es un múltiplo entero de  $2\pi i$ . Por lo tanto,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in \mathbb{Z}.$$

Análogamente, se tiene lo mismo para la curva  $\eta$ , y entonces concluimos que  $\int_{z_0 + \partial P} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in L$ . Por otro lado, sabemos que esta integral es precisamente la suma de los ceros de  $f$  menos los polos de  $f$  (contados con multiplicidad). Por lo tanto,  $\sum_{z \in P} (\text{ord}_z f) z \in L$ .

Como  $\mathbb{C}/L$  es un grupo (topológico) abeliano, entonces podemos darle una estructura de grupo a  $X$  (la curva elíptica asociada a  $\mathbb{C}/L$ ). Sean  $z_1 + L, z_2 + L \in \mathbb{C}/L$ , y consideremos la recta  $ax + by + c = 0$  que pasa por  $(\wp(z_1), \wp'(z_1))$  y  $(\wp(z_2), \wp'(z_2))$  (en  $\mathbb{C}^2$ ). Sea  $f(z) = a\wp(z) + b\wp'(z) + c$ ; notamos que es una función meromorfa en  $\mathbb{C}$  con periodo  $L$ .

Si  $b \neq 0$ , entonces  $f$  tiene un polo triple en 0. Notamos que  $z_1 + L$  y  $z_2 + L$  son ceros de  $f$ , y luego existe solamente un otro cero  $z_3 + L$  de  $f$ . Por el análisis anterior, como  $0 + L$  es el único polo de  $f$ , tenemos que  $z_1 + z_2 + z_3 + L = 0 + L$ . Así, definimos la suma

$$(\wp(z_1), \wp'(z_1)) + (\wp(z_2), \wp'(z_2)) := (\wp(-z_3), \wp'(-z_3)) = (\wp(z_3), -\wp'(z_3)) = (\wp(z_1 + z_2), \wp'(z_1 + z_2)).$$

Usando esto, observamos que para todo  $z + L \in \mathbb{C}/L$ , se tiene que  $(\wp(z), \wp'(z)) + \infty = \infty + (\wp(z), \wp'(z)) = (\wp(z), \wp'(z))$ .

Si  $b = 0$ , entonces  $f$  tiene un polo doble en 0, y entonces  $z_1 + L$  y  $z_2 + L$  son los únicos ceros de  $f$ . Tenemos que  $z_1 + z_2 + 0 + L = 0 + L$ , y entonces ponemos  $z_3 + L := 0 + L$ . Así,

$$(\wp(z_1), \wp'(z_1)) + (\wp(z_2), \wp'(z_2)) = (\wp(0), \wp'(0)) = \infty.$$

Con esto, observamos entonces que  $X$  es un grupo abeliano con la suma definida, su elemento neutro es  $\infty$  y la inversa de un elemento  $(\wp(z), \wp'(z))$  es  $(\wp(z), -\wp'(z))$ .

Finalmente, vemos que el isomorfismo de superficies de Riemann  $z + L \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$  es también un isomorfismo de grupos. Como  $\mathbb{C}/L$  es un grupo topológico, entonces también  $X$  es un grupo topológico.

## Referencias

- [1] Farkas, Hershel M. and Kra, Irwin: *Riemann Surfaces*. 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics, 71, Springer-Verlag New York (1980).
- [2] Massey, William S.: *A Basic Course in Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics, 127, Springer-Verlag New York (1991).
- [3] Miranda, Rick: *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*. Graduate Studies in Mathematics, v. 5, American Mathematical Society (1995).